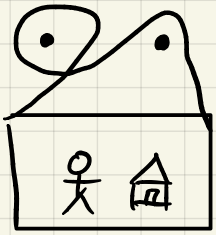
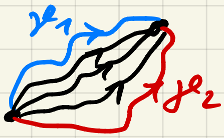
Topologie



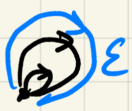
Aufgabe Wir wollen ein Bild an zwei Nägeln so aufhängen, dass es herunterfällt, falls wir einen beliebigen Nagel entfernen.

Wir wollen das Problem mathematisch beschreiben. Den Faden beschreiben wir als stetigen Pfad $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$. Da ein Faden jedoch elastisch ist, betrachten wir folgende Äquivalenzklassen

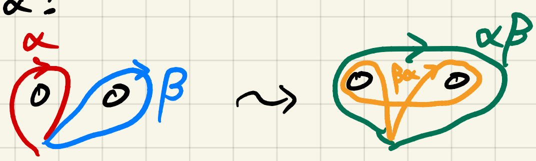
$\gamma_1 \sim \gamma_2 \Longleftrightarrow$ 

Betrachten wir nun eine Fläche X und alle Pfade mit gleichen Start- und Endpunkt, so erhalten wir die Fundamentalgruppe $\Pi_0(X)$ von X.

Beispiel Für $X = \mathbb{R}^2$ ist $\Pi_1(X) = \{\varepsilon\}$ (d.h. nur ein Element)

Wir nennen den leeren Pfad ε. 

Falls wir zwei Pfade α, β haben, so ist auch die Verkettung $\alpha\beta$ ein Pfad. Jedoch ist $\alpha\beta \neq \beta\alpha$!



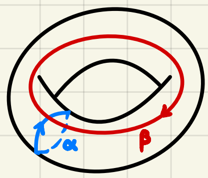
Für $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$, d.h. die Ebene mit n Löchern schreiben wir X_n.

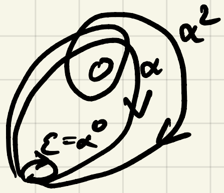
Aufgabe

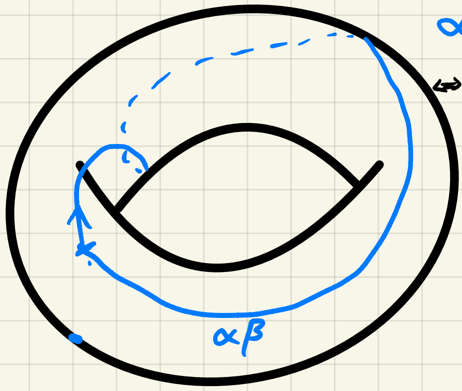
(i) Ist es wichtig in welchem Punkt die Pfade starten? Nein

(ii) Was sind die Fundamentalgruppen von X_0, X_1, X_2?

(iii) Was ist die Fundamentalgruppe der Oberfläche eines Torus $\mathbb{T}^2$?







$\alpha\beta=\beta\alpha \quad | \alpha^{-1}\beta^{-1}$

$\Leftrightarrow \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = \beta\alpha\alpha^{-1}\beta^{-1}$
$= \beta\beta^{-1}$
$= \varepsilon$

Die Fundamentalgruppen sind $\pi_1(X_0) = \{\varepsilon\} = \mathbb{Z}^0$, $\pi_1(X_1) = \langle\alpha\rangle = \{\dots, \alpha^{-2}, \alpha^{-1}, \varepsilon, \alpha, \alpha^2, \dots\} \cong \mathbb{Z}$, $\pi_1(X_2) = \langle\alpha,\beta\rangle \neq \mathbb{Z}^2$. Beachte, dass $\langle\alpha,\beta\rangle$ auch $\alpha\beta\alpha\beta$, $\alpha\beta\alpha^{-2}\beta^2\alpha^3$ usw. enthält.

Dabei nennen wir α, β die Basisschleifen.

betrachte alle Wörter aus diesen Elementen

Elemente die hier stehen sind gleich ε

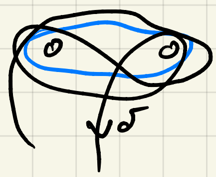
Die Fundamentalgruppe des Torus ist $\pi_1(\mathbb{T}) = \langle\alpha,\beta \,|\, \underbrace{\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}}_{=:[\alpha,\beta]}\rangle \cong \mathbb{Z}^2$
$= \{\alpha^k\beta^j \,|\, k,j \in \mathbb{Z}\}$.

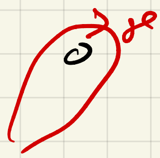
Kommutator von α,β.

Zurück zur Anfangsaufgabe

Der Kommutator $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ löst die Aufgabe, denn $\alpha\alpha^{-1}=\varepsilon$ und $\beta\beta^{-1}=\varepsilon$.

Können wir das auch für n Nägel schaffen?





Ja, die Idee ist, dass wir folgende Schleifen betrachten

$\Rightarrow \delta\gamma\delta^{-1}\gamma^{-1} = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\gamma\beta\alpha\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma^{-1}$

und analog für n Nägel erhalten wir rekursiv eine Lösung.