

# Die Galileischen Monde als Uhr

*Teilnehmer:*

7 Schülerinnen und Schüler

Heinrich-Hertz-Gymnasium  
Herder-Gymnasium  
Immanuel-Kant-Gymnasium  
Käthe-Kollwitz-Gymnasium

*mit tatkräftiger Unterstützung durch:*

Niklas Sturm  
Pia Keckert

Humboldt-Universität zu Berlin  
Andreas-Gymnasium

*Gruppenleiter:*

Luise Fehlinger

Humboldt-Universität zu Berlin, MATHEON

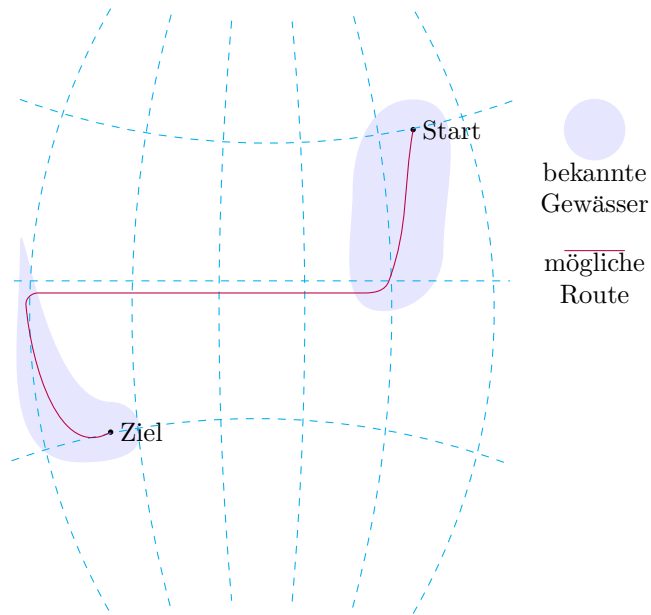
# 1. Das Längengradproblem

Galileo Galilei (1564 – 1641) versuchte ab 1616 die Jupitermonde als Zeitmesser zu nutzen, um das Längengradproblem zu lösen.

In der Schifffahrt war es damals ausreichend genau möglich, den Breitengrad zu bestimmen. Da man jedoch den Längengrad bei weitem nicht so genau bestimmen konnte, waren Schiffe gezwungen, in unbekanntem Gewässern nur entlang von Breitengraden zu segeln.

Nicht sehr effektiv! Solche Wege kosteten unnötig viel Zeit. Die Verpflegung auf Schiffen war ja schließlich nicht so optimal. Ein Problem, das mit jedem Tag an Bord schlimmer wurde.

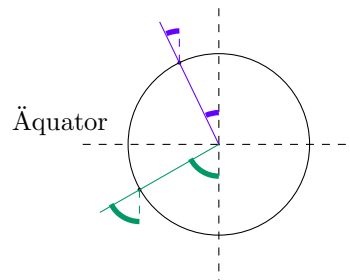
Deswegen war es unbedingt nötig, die Längengradbestimmung zu verbessern. 1600 hatte der König von Spanien sogar (erfolglos) einen Preis für eine Lösung ausgesetzt.



Die damalige Grundidee der Messung bestand darin, die eigene Sonnenzeit  $t_s$  (d.h. wenn die Sonne am höchsten steht, ist es 12 Uhr) mit der Greenwich-Zeit  $t_g$  zu vergleichen. Allerdings gingen mitgenommene Uhren, die auf Greenwich-Zeit gestellt waren, durch Wellengang und Klimaschwankungen zu ungenau. Das Problem bestand also darin, die Greenwich-Zeit überall auf der Welt messen zu können – also eine „Referenzzeit“ unabhängig vom Standort zu messen.

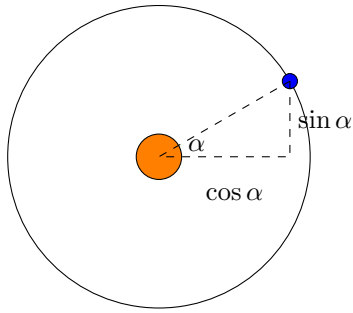
Dazu wollte Galileo Galilei die Jupitermonde nutzen. Er versuchte, die Position der Monde (in Abhängigkeit von der Zeit) vorherzusagen, um dann umgekehrt aus der Beobachtung der Positionen der Monde auf die Zeit zu schließen.

Die Bestimmung des Breitengrades ist bei einer sternklaren Nacht ausgesprochen einfach. Die geographische Breite ist am Nordpol  $90^\circ$  n.B. und am Südpol  $90^\circ$  s.B. Am Äquator ist sie  $0^\circ$ . Durch Anvisieren des Nordpolarsterns bzw. des Kreuzes des Südens kann man problemlos die geographische Breite der eigenen Position bestimmen, wie die nebenstehende Skizze verdeutlicht



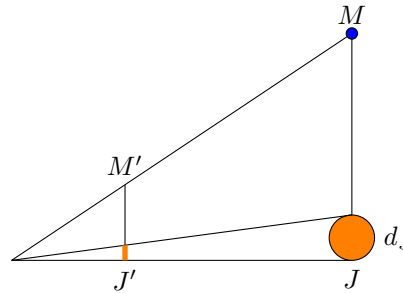
## 2. Ein erstes Modell

Es wird zuerst davon ausgegangen, dass die Erde und der Jupiter fix sind, der Einzige, der sich bewegt, sei der Jupitermond. Die Kreisbewegung ist somit mit Kosinus und Sinus zu beschreiben. Mit  $\theta$  bezeichnen wir die Umlaufdauer. In dieser Zeit hat der Jupitermond den Jupiter also einmal umrundet und einen Winkel von  $2\pi$  zurückgelegt. Daher, dass der Jupitermond nicht von  $0^\circ$  beginnt zu umrunden, kommt hierzu noch die zeitliche Phasenverschiebung  $\varphi$ . Wir kommen somit auf die folgende Funktion.



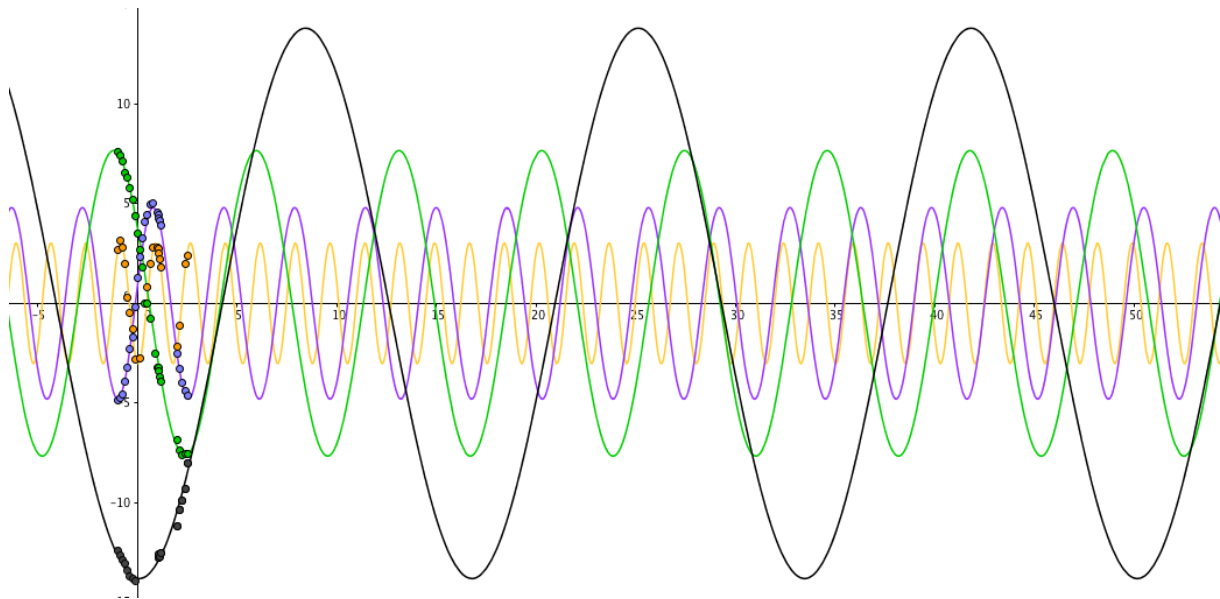
$$M(t) = r_M \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = r_M \cdot \begin{pmatrix} \cos \left( \frac{2\pi}{\theta} \cdot t + \varphi \right) \\ \sin \left( \frac{2\pi}{\theta} \cdot t + \varphi \right) \end{pmatrix}$$

Die Periodendauer und die zeitliche Phasenverschiebung sind durch Messungen herauszufinden und  $r_m$ , der Radius der Umlaufbahn des Jupitermondes kann durch die Strahlensätze in Abhängigkeit vom Durchmesser des Jupiters berechnet werden.



$$r_J = \frac{|J'M'|}{|d'_J|} \cdot d_J$$

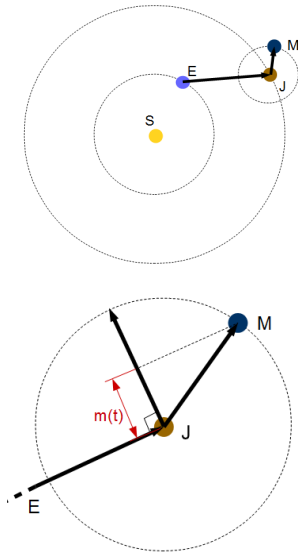
Auf diese Art können wir also mit wenigen Beobachtungen die Position der Jupitermonde durch Sinusfunktionen modellieren, wobei der Radius der Umlaufbahn ein Vielfaches des Durchmessers des Jupiters ist. Allerdings ermöglicht dieses Modell nur für die nächsten zwei Wochen eine Zeitbestimmung aus der beobachteten Position der Monde. Schon nach vier Wochen treten deutliche Abweichungen von unserem Modell auf.



Dies ist aber nicht wirklich verwunderlich. Schließlich sind Erde und Jupiter keine feststehenden Objekte. Sie bewegen sich nicht nur um die Sonne sondern auch relativ zu einander. Wenn man um ein kreisendes Objekt herumgeht, erscheint die Kreisbewegung schneller, wenn man in entgegengesetzter Richtung unterwegs ist, und langsamer, wenn man in derselben Richtung geht. Und dies können wir bei unserem Modell offensichtlich nicht vernachlässigen.

### 3. Vorbereitungen zur Verbesserung des Modells

#### 3.1. Skizze der Situation



Die Ansicht des Mondes von der Erde aus kann durch die 2 Vektoren  $\vec{EJ}$  und  $\vec{JM}$  dargestellt werden. Den Vektor  $\vec{JM}$  haben wir bereits beim ersten Modell bestimmt. Den Vektor  $\vec{EJ}$  können wir durch Vektoraddition der zwei Vektoren  $\vec{SJ}$  und  $\vec{SE}$ , von der Sonne zum Jupiter bzw. von der Sonne zur Erde, bestimmen:

$$\vec{EJ} = \vec{SJ} - \vec{SE}$$

Dabei approximieren wir die Bahnen von Erde und Jupiter um die Sonne als Kreisbahnen.

Der gemessene Abstand zwischen Jupiter und dem Jupitermond ist die Projektion auf den um  $90^\circ$  rotierten Vektor  $\vec{EJ}$ . Diesen wollen wir durch das Skalarprodukt darstellen. Wie wir gleich sehen werden, lässt sich unsere Ansicht eines Jupitermondes durch

$$m(t) = \frac{\langle \vec{JM}, \vec{EJ}^\perp \rangle}{\|\vec{EJ}\|}$$

darstellen. Um diese Formel zu verstehen, muss man einiges über das Skalarprodukt von zweidimensionalen Vektoren wissen.

#### 3.2. Das Skalarprodukt

**Definition 1.** Skalarprodukt

Das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$  ist definiert als:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} \right\rangle := a_x b_x + a_y b_y.$$

Die folgenden Eigenschaften des Skalarproduktes lassen sich direkt nachrechnen.

Für alle Vektoren  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$ , alle Skalare  $c \in \mathbb{R}$  und geeignete Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  gilt:

- $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = a_x^2 + a_y^2 =: \|\vec{a}\|^2$ ,
- $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$ ,
- $\langle c \cdot \vec{a}, \vec{b} \rangle = c \cdot \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ ,

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle &= \left\langle \|\vec{a}\| \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, \|\vec{b}\| \cdot \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \left\langle \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

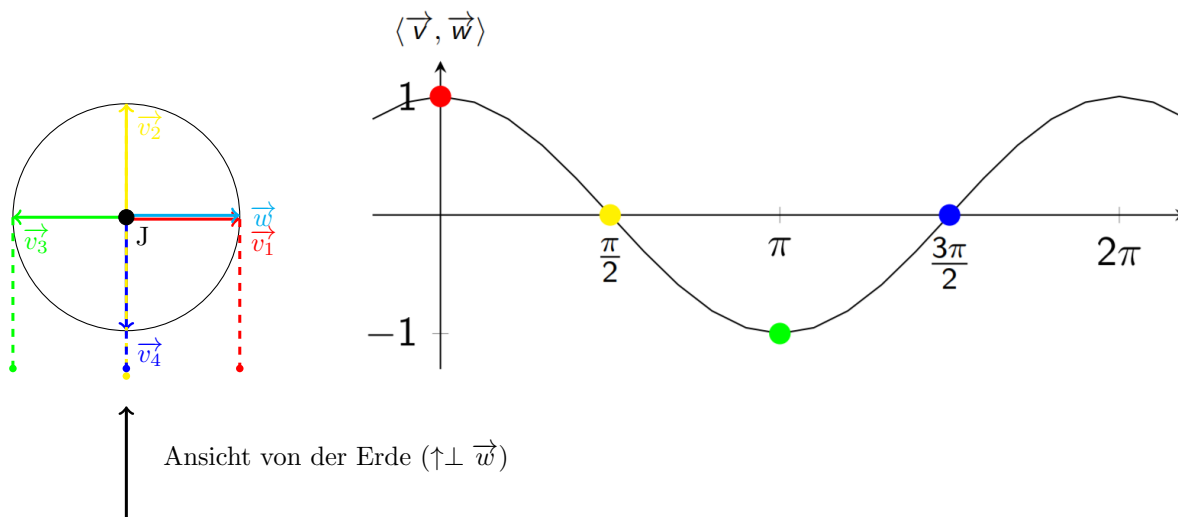
Wir berechnen nun also noch das Skalarprodukt zweier beliebiger Einheitsvektoren.

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix} \right\rangle &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ &= \cos(\alpha - \beta) \quad \text{Additionstheorem} \end{aligned}$$

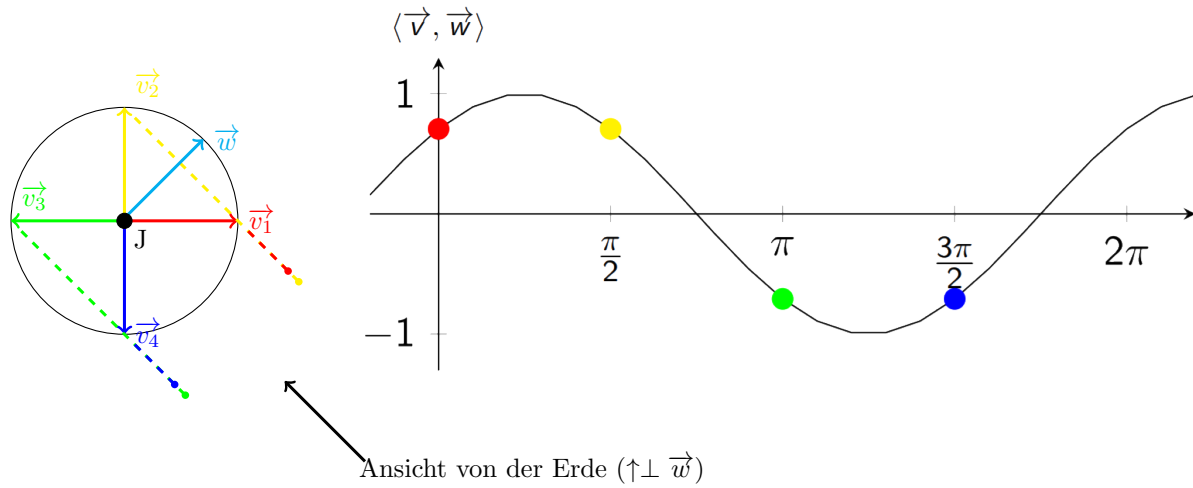
Damit lässt sich das Skalarprodukt zweier Vektoren auch als das Produkt aus den Längen der Vektoren und dem Kosinus des eingeschlossenen Winkels berechnen.

$$\begin{aligned} \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle &= \langle \|\vec{a}\| \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, \|\vec{b}\| \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix} \rangle \\ &= \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\alpha - \beta). \end{aligned}$$

Um zu verdeutlichen, wie uns das Skalarprodukt dabei helfen kann, die Bewegungen der Jupitermonde genauer zu beschreiben, schauen wir uns die Konstellation Jupiter (J) und einen beliebigen Jupitermond, welcher um Jupiter kreist, an. Die Vektoren  $\vec{v}_1$  bis  $\vec{v}_4$  beschreiben dabei verschiedene Positionen des Mondes. Der Vektor  $\vec{w}$  ist der Vektor senkrecht zu unserer Blickrichtung. Wenn wir uns nun das Skalarprodukt zwischen einem Vektor  $\vec{v}$  (Vektor  $\vec{JM}$ ) und den Vektor  $\vec{w}$  anschauen, erhalten wir eine Kosinusfunktion in Abhängigkeit vom Winkel zwischen  $\vec{w}$  und  $\vec{v}$ . Mit den gefärbten Punkten sind die Werte für die ausgewählten Positionen  $\vec{v}_1$  bis  $\vec{v}_4$  des Mondes gekennzeichnet.

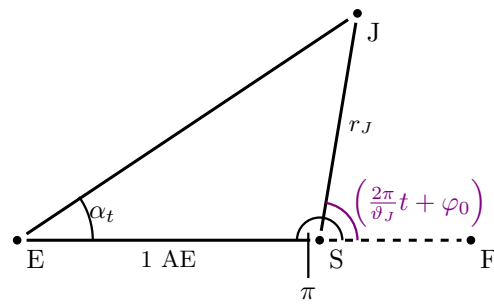


Nach einiger Zeit haben sich Erde und Jupiter gegeneinander verschoben. Die Ansicht von der Erde und somit auch die Position des Vektors  $\vec{w}$  haben sich geändert. Das Skalarprodukt liefert uns jedoch trotzdem den richtigen Wert relativ zu  $\vec{w}$ . Würden wir mit dem ersten Modell arbeiten, so würde die Kosinusfunktion gleich aussehen und wir hätten falsche Werte für die Position des Mondes. Nun haben wir jedoch eine Phasenverschiebung in die Funktion eingebracht (durch das Skalarprodukt), die den Fehler korrigiert.



### 3.3. Die Bestimmung der Parameter des Jupiters

Für die Bestimmung der Bewegung der Monde, benötigen wir weiterhin die Umlaufzeit des Jupiters um die Sonne ( $\vartheta_J$ ), den Umlaufradius des Jupiters ( $r_J$ ) und die Phasenverschiebung ( $\varphi_J$ ). Dafür schauen wir uns die Konstellation Erde, Sonne, Jupiter zu Zeiten, in denen die Sonne gerade im Frühlingspunkt steht, an. Der Winkel zwischen  $\vec{SE}$  und  $\vec{SF}$  beträgt also  $\pi$ . Der Umlaufradius der Erde wird normiert zu 1AE (astronomische Einheit). Der Winkel zwischen  $\vec{ES}$  und  $\vec{EJ}$  wird  $\alpha_t$  genannt.



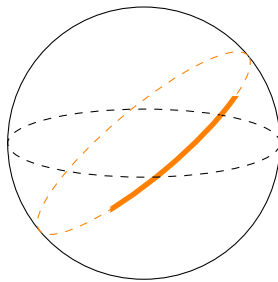
Nun können wir den Sinussatz verwenden mit dem Winkel  $\alpha_t$  und dem Winkel zwischen  $\vec{JE}$  und  $\vec{JS}$  und den Seiten  $r_E$  und  $r_J$ .

$$\frac{\sin \alpha_t}{r_J} = \frac{\sin(\pi - (\pi - \frac{2\pi}{\vartheta_J}t + \varphi_0) - \alpha_t)}{1}$$

$$\implies \sin \alpha_t = \sin\left(\frac{2\pi}{\vartheta_J}t + \varphi_0 - \alpha_t\right) \cdot r_J$$

Anschließend können wir den Winkel  $\alpha_t$  durch Beobachtungen und Nutzen der sphärischen Trigonometrie bestimmen und die Sinusfunktion davon zeichnen. Durch die Anpassung der Werte  $r_J, \vartheta_J$  und  $\varphi_0$ , können wir die rechte Seite der Gleichung an die Sinusfunktion anpassen. Falls wir dieselbe Funktion herausbekommen heißt das, dass wir die Werte für Jupiter relativ genau bestimmt haben.

### 3.4. Sphärische Trigonometrie

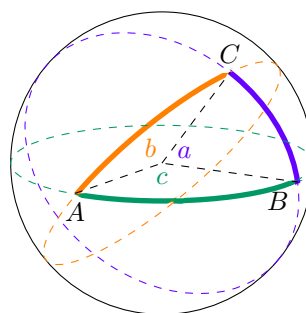
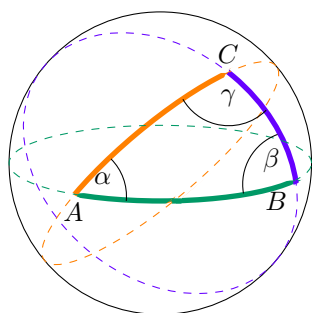
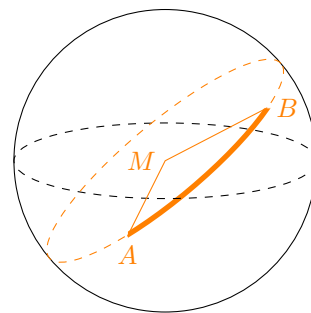


Den Geraden in der Ebene  $\mathbb{R}^2$  entsprechen die Großkreise auf der Sphäre  $S^2$ .

Zu je zwei Punkten auf der Sphäre gibt es genau einen Großkreis (d.h. der Mittelpunkt des Kreises ist der Mittelpunkt der Sphäre), der beide Punkte enthält.

Der kürzere Kreisbogen zwischen den beiden Punkten ist die kürzeste Verbindung zwischen ihnen.

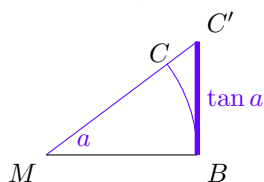
Für den Abstand zweier Punkte  $A, B \in S^2$  gilt  $d(A, B) = R \cdot |\angle AMB|$ . Dabei ist  $R$  der Radius der Sphäre und  $M$  ihr Mittelpunkt. Wir setzen  $R = 1$  und können damit die Länge des Bogens zwischen  $A$  und  $B$  mit dem Maß des Zentriwinkels  $\angle AMB$  gleichsetzen. Einem sphärischen Dreieck lassen sich also sechs Winkel zuordnen – die drei zu den Seiten gehörenden Zentriwinkel und die Winkel zwischen den Seiten an den Eckpunkten. Die letzteren werden genauer zwischen den Tangenten der Großkreise in den Eckpunkten gemessen.



Welche Beziehungen gelten nun für  $a, b, c$  und  $\alpha, \beta, \gamma$ ?

Wir legen im Punkt  $B$  die Tangentialebene an die Sphäre  $S^2$ . Die Schnittpunkte der Geraden  $g_{MA}$  bzw.  $g_{MC}$  mit der Tangentialebene nennen wir  $A'$  bzw.  $B'$  (wir nehmen an, dass  $a$  und  $c$  keine rechten Winkel sind).

Ansicht in der Ebene durch  $M, B, C$

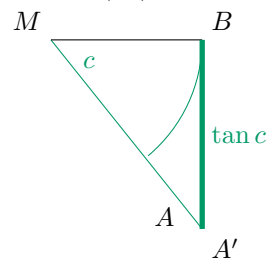


Damit gilt  $|\overline{BC'}| = \tan a$  und  $|\overline{BA'}| = \tan c$ . Außerdem gilt mit  $R = |\overline{MB}| = 1$

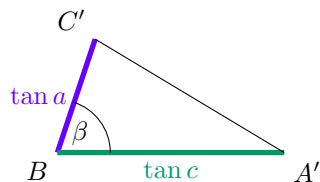
$$\Rightarrow \frac{\cos a}{|\overline{MC'}|} = \frac{1}{\cos a}$$

und analog  $|\overline{MA'}| = \frac{1}{\cos c}$ .

Ansicht in der Ebene durch  $M, B, A$



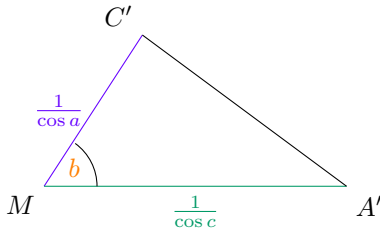
Ansicht in der Tangentialebene an  $S^2$  im Punkt  $B$



In dem ebenen Dreieck  $\Delta A'BC'$  gilt der ebene Kosinussatz.

$$|\overline{A'C'}|^2 = \tan^2 c + \tan^2 a - 2 \tan c \cdot \tan a \cdot \cos \beta$$

Ansicht in der Ebene durch  $M, A', C'$



In dem ebenen Dreieck  $\Delta A'MC'$  gilt der ebene Kosinussatz.

$$\begin{aligned} |\overline{A'C'}|^2 &= \frac{1}{\cos^2 c} + \frac{1}{\cos^2 a} - 2 \frac{1}{\cos c} \cdot \frac{1}{\cos a} \cdot \cos b \\ &= \frac{\sin^2 c + \cos^2 c}{\cos^2 c} + \frac{\sin^2 a + \cos^2 a}{\cos^2 a} - 2 \frac{1}{\cos c} \cdot \frac{1}{\cos a} \cdot \cos b \\ &= \left(1 + \tan^2 c\right) + \left(1 + \tan^2 a\right) - 2 \frac{1}{\cos c} \cdot \frac{1}{\cos a} \cdot \cos b \\ &= 2 + \tan^2 c + \tan^2 a - 2 \frac{1}{\cos c} \cdot \frac{1}{\cos a} \cdot \cos b \end{aligned}$$

Wir setzen die beiden Terme für  $|\overline{A'C'}|^2$  gleich und formen nach  $\cos b$  um.

$$\begin{aligned} \tan^2 c + \tan^2 a - 2 \tan c \cdot \tan a \cdot \cos \beta &= 2 + \tan^2 c + \tan^2 a - 2 \frac{1}{\cos c} \cdot \frac{1}{\cos a} \cdot \cos b \\ \Leftrightarrow -2 \tan c \cdot \tan a \cdot \cos \beta &= 2 - 2 \frac{1}{\cos c} \cdot \frac{1}{\cos a} \cdot \cos b \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\cos c} \cdot \frac{1}{\cos a} \cdot \cos b &= 1 + \tan c \cdot \tan a \cdot \cos \beta \\ \Leftrightarrow \cos b &= \cos c \cdot \cos a + \sin c \cdot \sin a \cdot \cos \beta \end{aligned}$$

Durch zyklische Vertauschung erhalten wir analoge Identitäten für  $\cos a$  und  $\cos c$  und damit den Seiten-Kosinussatz.

### Satz 1. Seiten-Kosinussatz

In einem sphärischen Dreieck  $\Delta ABC$  mit den Innenwinkelmaßen  $\alpha, \beta, \gamma$  und den Zentriwinkelmaßen  $a, b, c$  gilt

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha, \\ \cos b &= \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos \beta \text{ und} \\ \cos c &= \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \gamma. \end{aligned}$$

## 4. Das zweite Modell

Die Erkenntnisse der vorhergehenden Abschnitte nutzen wir nun, um unser verbessertes Modell vollständig zu beschreiben.

Wir hatten schon festgestellt, dass sich die beobachtete Position eines Jupitermondes durch die folgende Funktion beschreiben lässt.

$$m(t) = \frac{\langle \overrightarrow{JM}, \overrightarrow{EJ}^\perp \rangle}{\|\overrightarrow{EJ}\|}$$

Für diese Gleichung benötigen wir noch die Vektoren  $\overrightarrow{SJ}$  und  $\overrightarrow{SE}$ , die wie folgt dargestellt werden können:

$$\overrightarrow{SJ} = r_J \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi}{\vartheta_J} t + \varphi_J) \\ \sin(\frac{2\pi}{\vartheta_J} t + \varphi_J) \end{pmatrix} = r_J \begin{pmatrix} c_J \\ s_J \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{SE} = 1 \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi}{\vartheta_E} t + \varphi_E) \\ \sin(\frac{2\pi}{\vartheta_E} t + \varphi_E) \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} c_E \\ s_E \end{pmatrix}.$$

Den Bahnradius der Erde legen wir als eine Astronomische Einheit, die Umlaufzeit als ein Jahr und die Phasenverschiebung als  $\pi$  fest. Für Jupiter konnten wir den Bahnradius und die Umlaufzeit schon wie oben beschrieben ermitteln.

Jetzt können wir den Vektor  $\overrightarrow{EJ}$  bestimmen und um  $90^\circ$  rotieren:

$$\overrightarrow{EJ} = \overrightarrow{SJ} - \overrightarrow{SE} = \begin{pmatrix} r_J c_J - c_E \\ r_J s_J - s_E \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{EJ}^\perp = \begin{pmatrix} s_E - r_J s_J \\ r_J c_J - c_E \end{pmatrix}.$$



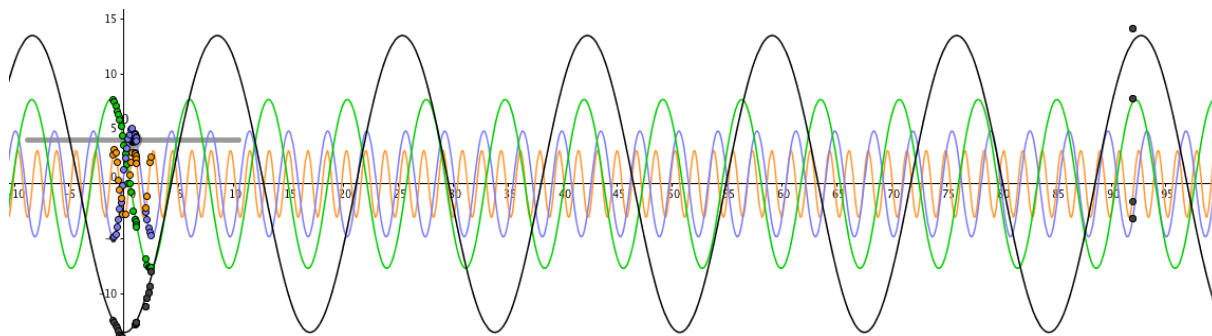
Die Länge eines Vektors kann durch den Satz des Pythagoras bestimmt werden:

$$\begin{aligned}\|\vec{EJ}\| &= \sqrt{(r_J c_J - s_E)^2 + (s_e - r_J c_J)^2} \\ &= \sqrt{r_J^2 + 1 - 2r_J(c_s c_e + s_j s_e)}.\end{aligned}$$

Setzt man alle Vektoren in die Gleichung ein, ergibt sich:

$$\begin{aligned}m(t) &= \frac{\langle \vec{JM}, \vec{EJ}^\perp \rangle}{\|\vec{EJ}\|} \\ &= r_M \frac{c_M(s_E - r_J s_J) + s_M(r_J c_J - c_E)}{\sqrt{r_J^2 + 1 - 2r_J(c_s c_e + s_j s_e)}}.\end{aligned}$$

In GeoGebra haben wir die Parameter unserer Funktionen für die vier Galileischen Monde angepasst. Dabei liefert unsere Modellierung über drei Monate hinweg eine zuverlässige Zeitbestimmung. Im Bild zu sehen sind die zu den Messwerten angepassten Graphen und Test-Daten drei Monate später.



Wir können jetzt also immerhin schon drei Monate relativ sicher auf See navigieren – vorausgesetzt es gibt nicht zu viele Wolken und das Schiff schaukelt nicht so stark (besser gar nicht), damit wir Jupiter mit unserem Fernrohr tatsächlich beobachten können.

Tja, diese Bedingungen sind vielleicht nicht immer gegeben. Zum Glück haben sich aber auch die Uhrmacher dieses Problems angenommen. Also in Zukunft vielleicht einfach eine gute Uhr mitnehmen, wenn man auf Reisen geht.

## 5. Anhang – Umrechnung von Horizontkoordinaten in feste Äquatorkoordinaten

Wir haben Horizontkoordinaten (d.h. Höhe  $h$  über dem Horizont und Azimut  $z$  – Winkel am Horizont von Süden aus in Richtung Westen gemessen) gegeben. Erhalten wollen wir die Deklination  $\delta$ , d.h. die Höhe über dem Himmelsäquator. Wir behalten jedoch zunächst den Süden als Nullpunkt für den Stundenwinkel  $\tau$  bei.

Wir betrachten das sphärische Dreieck mit den Eckpunkten  $N$  (Nordpolarstern),  $Z$  (Zenit) und  $O$  (Objekt, dessen Koordinaten und interessieren). Dabei beträgt der Winkel zwischen dem Nordpolarstern und dem Zenit gerade  $\frac{\pi}{2} - b$ , wobei  $b$  die geographische Breite des Standorts ist.

