Quaternionen: von Hamilton, Basketbällen und anderen Katastrophen

Teilnehmer:

Kevin Höllring	Johannes-Schacher-Gymnasium, Nürnberg
Katharina Kramer	Gymnasium Engelsdorf, Leipzig
Armin Meyer	Herder-Gymnasium, Berlin
Tuan Hung Nguyen	Andreas-Gymnasium, Berlin
Duc Linh Tran	Heinrich-Hertz-Gymnasium, Berlin
Khai Van Tran	Herder-Gymnasium, Berlin
Artsiom Zhavaran	Immanuel-Kant-Schule, Berlin

Gruppenleiter:

Katrin Leschke	University of Leicester, UK
Thilo Steinkrauß	Herder-Gymnasium, Berlin

1 Einleitung

Die Quaternionen-Algebra wurde an 16. Oktober 1843 von Sir Hamilton entdeckt. Hamilton war schon lange auf der Suche nach einer Verallgemeinerung von imaginären Zahlen, und an diesem Tag war er auf einem Spaziergang, als ihm die Erleuchtung kam:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1\,.$$

Was bedeutet das? Woher wissen wir die Geschichte der Entdeckung so genau? Und was hat das jetzt mit Basketbällen und anderen Katastrophen zu tun?

Beispielsweise zum Progammieren von Computer-Spielen brauchen wir eine effiziente Methode, Bewegungen im Raum darzustellen. Die traditionell benutzten Euler-Winkel verursachen ernsthafte Probleme ("gimbal lock"): In der Praxis ist dies bei der Navigation von Schiffen, der Luftfahrt und speziell der Raumfahrt von Bedeutung, aber auch bei 3D-Computer-Spielen. Eine Lösung des Problems ist die Verwendung von Quaternionen.

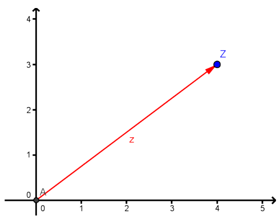
Wir beschränken uns auf die Rotation eines (Basket-) Balls. Zunächst werden wir aber untersuchen, wie Rotationen in der Ebene durch komplexe Zahlen beschrieben werden. Danach können wir dies zu quaternionischen Drehungen verallgemeinern.

2 Komplexe Zahlen

Ein Ausdruck der Form $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, wobei $i^2 = -1$, heißt eine komplexe Zahl. $x = \operatorname{Re} z$ heißt Realteil von z und $y = \operatorname{Im} z$ der Imaginärteil von z. Die Menge $\mathbb{C}$ aller komplexen Zahlen enthält die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ($y = 0$).

Der Ansatz, um komplexe Zahlen zu finden, war das folgende Problem: Mit reellen Zahlen kann man Gleichungen wie etwa $z^2 = -1$ nicht lösen, weil man nur aus nichtnegativen Zahlen die Wurzel ziehen kann; $\sqrt{-1}$ ist nicht in den reellen Zahlen definiert. Daher wurde die imaginäre Einheit i mit $i^2 = -1$ eingeführt.

Ein anderer Ansatz ist, dass man sich die reellen Zahlen auf einer Zahlengeraden vorstellen kann. Komplexe Zahlen sind dann als Zahlenpaar und damit als Punkt in der Ebene vorstellbar, zum Beispiel $z = 4 + 3i = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$:



3 Hamilton: der Entdecker der Quaternionen

Sir William Rowan Hamilton ist 1805 in Dublin geboren und liest bereits mit 5 Jahren Lateinisch, Griechisch und Hebräisch. 1823 ist Hamilton Student am Trinity College in Dublin. Vier Jahre später folgt seine Berufung zum Professor der Astronomie an der Universität Dublin und zum Direktor der Sternwarte von Dunsink mit dem Titel Royal Astronomer of Ireland. In diesem Jahr entwickelt er ebenfalls die geometrische Optik aus Extremalprinzipien. 1835 wird Hamilton zum Ritter geschlagen, zwischen 1837 und 1845 wird er Präsident der Royal Irish Academy. 1843 erfindet Hamilton die Quaternionen, auf die wir im Folgenden eingehen.

Sir William Rowan Hamilton suchte nach einer Multiplikation für Tripel, so dass die üblichen Regeln weiter gelten:

$$|r + ix + jy|^2 = \left|(r + ix + jy)^2\right|$$

Er machte den Ansatz $\alpha + \beta i + \gamma j$ mit $i^2 = j^2 = -1$. Er stellt fest, dass obige Beziehung sicher dann gilt, wenn man $ij = 0$ setzt. Nach längeren Überlegungen stellt Hamilton jedoch fest, dass $ij = -ji$ sein muss. Er opfert somit das

Kommutativgesetz. Jedoch hatte er im Anschluss die Idee, mit k in eine vierte Dimension einzutauchen, worin k linear unabhängig von i, j, und 1 ist.

Sein folgendes wissenschaftliches Leben widmete Hamilton ausschließlich der Erforschung der Quaternionen. Den Moment der Entdeckung hat Hamilton in einem Brief an seinen Sohn erwähnt, in dem er unter anderem beschrieb, dass er die fundamentale Gleichung der Quaternionen mit einem Messer in die Brougham Bridge in Dublin einritzte:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \,. \tag{3.1}$$

4 Quaternionen

Es ist für spätere Rechnungen notwendig, dass man durch eine der imaginären Zahlen das Produkt der zwei anderen imaginären Zahlen darstellen kann. Mit (3.1) berechnen wir:

$$ijk = -1 \iff ijk^2 = -k \iff -ij = -k \iff ij = k$$

und

$$-1 = ijk \iff -i = i^2jk \iff i = jk \iff ji = j^2k \iff ji = -k.$$

Nach gleichem Prinzip kann man auch die anderen Kombinationen ermitteln. Die Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle gezeigt.

$\cdot$	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Hierbei wird offensichtlich, dass die Multiplikation von i, j, k nicht kommutativ ist, da $ij \neq ji$. Die Menge der Quaternionen wird allgemein nach Hamilton mit einem $\mathbb{H}$ dargestellt. Sie sind ein Quadrupel aus reellen Zahlen:

$$\mathbb{H} = \mathbb{R}^4 = \{(r, x, y, z) \mid r, x, y, z \in \mathbb{R}\} \,.$$

Quaternionen lassen sich alternativ in der Form

$$v = r + xi + yj + zk \in \mathbb{H}$$

darstellen, wobei v in zwei Teile unterteilt ist:

1. in den Realteil $\mathrm{Re}\,(v) = r \in \mathbb{R}$ und
2. den Imaginärteil $\mathrm{Im}\,(v) = xi + yj + zk$.

Der Imaginärteil $\mathrm{Im}\,(v)$ ist ein 3-Tupel und damit ein Vektor in $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^3 &= \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{xi + yj + zk \mid x,y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{v \in \mathbb{H} \mid \mathrm{Re}\,(v) = 0\} = \mathrm{Im}\,(\mathbb{H})\,.\end{aligned}$$

Die Länge eines Quaternions ist gegeben durch

$$|v| = \sqrt{r^2 + x^2 + y^2 + z^2}$$

(nach dem Satz des Pythagoras angewandt im 4-dimensionalen Raum). Die Konjugierte von v ist definiert als:

$$\bar{v} = \mathrm{Re}\,(v) - \mathrm{Im}\,(v) = r - (xi + yj + zk) = r - xi - yj - zk$$

Sie ist die Spiegelung des Quaternions v an der reellen Achse. Mit den Formeln für v und $\bar{v}$ ergibt sich:

$$\mathrm{Re}\,(v) = \frac{v + \bar{v}}{2}, \quad \mathrm{Im}\,(v) = \frac{v - \bar{v}}{2}\,.$$

5 Körpereigenschaften der Quaternionen

Anhand der Tabelle haben wir gesehen, dass $(\mathbb{H}, \cdot)$ nicht kommutativ ist. Aber inwiefern erfüllt die algebraische Struktur weitere Körpereigenschaften?

1. Die Operationen $+$ und $\cdot$ sind eine Abbildung von $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ in $\mathbb{R}^4$. Dabei ist die Addition gegeben durch komponentenweise Addition:

   $$(a+bi+cj+dk)+(r+xi+yj+zk) = (a+r)+(b+x)i+(c+y)j+(d+z)k\,,$$

   zum Beispiel:

   $$(5 + 4j - 6k) + (3i - 4j + k) = 5 + 3i - 5k\,.$$

   Die Multiplikation erhält man unter Benutzung der Tabelle durch Ausmultiplizieren:

   $$\begin{aligned}(a + bi + cj + dk) \cdot (r + xi + yj + zk) &= (ar - bx - cy - dz) \\ &\quad +(ax + br + cz - dy)i \\ &\quad +(ay - bz + cr + dx)j \\ &\quad +(az + by - cx + dr)k\,,\end{aligned}$$

zum Beispiel:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}k\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}j\,. \tag{5.1}$$

2. Die Assoziativität gilt bezüglich der Addition und der Multiplikation.

3. Das Nullelement der Addition ist $(0,0,0,0)$, und das Einselement der Multiplikation ist $(1,0,0,0)$.

4. Für die Addition ist $(-r,-x,-y,-z)$ das inverse Element von $v=(r,x,y,z)$, $v\in\mathbb{H}$, und für die Multiplikation ist $\frac{\overline{v}}{|v|^2}=\frac{(r-xi-yj-zk)}{(r^2+x^2+y^2+z^2)}$ das Inverse von $v\in\mathbb{H}\backslash\{0\}$.

5. Kommutativität gilt bei der Addition, aber nicht bei der Multiplikation. Zusammen mit den vorherigen Eigenschaften erhalten wir also, dass $(\mathbb{R}^4,+)$ eine Abelsche Gruppe ist. $(\mathbb{R}^4\backslash\{0\},\cdot)$ ist eine Gruppe, jedoch keine Abelsche Gruppe.

6. Die Distributivgesetze gelten.

Diese Eigenschaften bedeuten, dass $(\mathbb{H},+,\cdot)$ ein *Schiefkörper* ist.

6 Weitere Rechnungen in $\mathbb{H}$

In $\mathbb{R}^3=\mathrm{Im}\,(\mathbb{H})$ gibt es noch weitere wichtige Operationen. Mit

$$v=xi+yj+zk,\quad w=bi+cj+dk\in\mathrm{Im}\,\mathbb{H}$$

haben wir

- das Skalaprodukt:
$$\langle v,w\rangle = xb+yc+zd$$

- und das Kreuzprodukt (Vektorprodukt):
$$(v\times w)=(yd-zc)i+(zb-xd)j+(xc-yb)k$$

  Das Kreuzprodukt von v und w ergibt einen Vektor, der senkrecht auf der von v und w aufgespannten Ebene steht.

Zwischen dem Skalarprodukt, dem Kreuzprodukt und der Multiplikation in den Quaternionen besteht die folgende Beziehung für $v, w \in \mathrm{Im}\,\mathbb{H}$:

$$v \cdot w \quad = \quad v \times w - \langle v, w \rangle \,.$$

Allgemeiner gilt für beliebige Quaternionen $v, w \in \mathbb{H}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\,(v \cdot w) &= \mathrm{Re}\,(v)\mathrm{Re}\,(w) - \langle \mathrm{Im}\,(v), \mathrm{Im}\,(w) \rangle \\ \mathrm{Im}\,(v \cdot w) &= \mathrm{Re}\,(v)\mathrm{Im}\,(w) + \mathrm{Re}\,(w)\mathrm{Im}\,(v) + \mathrm{Im}\,(v) \times \mathrm{Im}\,(w)\,. \end{aligned}$$

7 Drehungen in $\mathbb{R}^2$

Eine $n \times m$-Matrix ist eine geordnete Ansammlung von nm reellen Zahlen. Beispielsweise ist die Multipliaktion einer $2{\times}2$-Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit einem 2-dimensionalen Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ wie folgt definiert:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} \,.$$

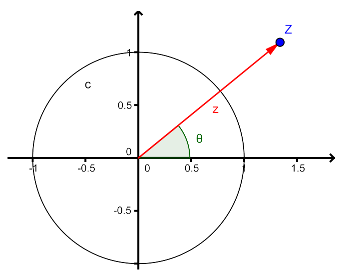
Analog ist dann auch

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + cz \\ dx + ey + fz \\ gx + hy + mz \end{pmatrix} \,.$$

Eine komplexe Zahl lässt sich auch mit Polarkoordinaten darstellen:

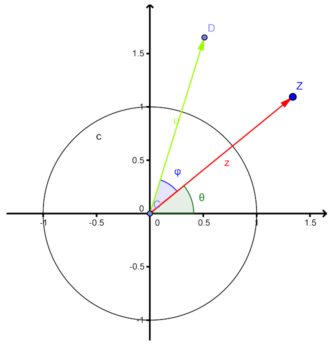
$$v = x + iy = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} \,,$$

wobei $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ die Länge von v und θ der Winkel zwischen v und der x–Achse ist.



Eine Drehung um den Winkel φ erhalten wir also, unter Benutzung der Additionstheoreme, durch komplexe Multiplikation:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\theta+\varphi) \\ r\sin(\theta+\varphi) \end{pmatrix} .$$



Alternativ lassen sich Drehungen mittels Drehmatrizen beschreiben:

$$w = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

Für die Verallgemeinerung zu Drehungen im $\mathbb{R}^3$ betrachten wir die Halbwinkelform: wieder mit den Additionstheoremen erhalten wir

$$w = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & -2ab \\ 2ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix} v ,$$

wobei $a = \cos(\frac{\varphi}{2})$ und $b = \sin(\frac{\varphi}{2})$ ist.

8 Rotationen im $\mathbb{R}^3$

Nachdem wir nun die Frage der Rotation in einer Ebene genauer beleuchtet haben, stellt sich natürlich die Frage: Lässt sich eine ähnliche Darstellung, wie wir sie für die Rotation der komplexen Zahlen gefunden haben, auch für die Rotation im 3-dimensionalen Raum $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Im}\mathbb{H}$ finden?

Die Antwort auf diese Frage ist ein "Jein".

Einerseits muss man sagen, dass wir leider keine so einfache Darstellung haben, wie die Multiplikation mit $\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$, die in $\mathbb{C}$ bereits für die Drehung um den Winkel φ ausreicht. Das Hauptproblem hierbei ist, dass die Multiplikation in den Quaternionen nicht kommutativ ist.

Andererseits können wir auch "ja" sagen, da es eine Matrixschreibweise für Drehungen im $\mathbb{R}^3$ gibt, die im Wesentlichen genauso aufgebaut ist wie die Matrixschreibweise im $\mathbb{R}^2$. Wenn man es sich veranschaulicht, dann ist jede Drehung um eine der Koordinatenachsen eigentlich eine Drehung in der Ebene, die senkrecht zur Drehachse steht. Es ist daher einfach, eine Matrix zu finden, die die Position in Richtung einer Koordinatenachse unberührt lässt und eine Drehung in der von den anderen Achsen aufgespannten Ebene ist:

$$
\begin{aligned}
R_x(\varphi) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \quad R_y(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \\
R_z(\varphi) &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Dabei stehen R_x, R_y, R_z für die Drehung um die x–, y– bzw. z–Achse. Was an dieser Stelle auffällt, ist der Tausch von $-\sin(\varphi)$ und $\sin(\varphi)$ in der Drehung um die y-Achse. Der Grund für diese Vertauschung ist der Wunsch, bei der Drehung die Orientierung des Rechtssystems der Koordinatenachsen zu erhalten.

An dieser Stelle haben wir also bereits ein erstes Etappenziel erreicht: Wir können im $\mathbb{R}^3$ um die Koordinatenachsen drehen. Aber können wir das auch um eine beliebige Achse? Überlegen wir uns doch einmal, wie man im Raum drehen würde. Üblicherweise dreht man nicht direkt von der Ausgangs– in die Zielposition sondern orientiert sich an den Koordinatenachsen: die Drehung wird als eine Kombination von Drehungen um die Koordinatenachsen angegeben.

Wir beschreiben die Drehachse durch einen Einheitsvektor $n \in \mathbb{R}^3$. Um die Drehung um n mit Winkel φ zu beschreiben, fassen wir die n–Achse zunächst selbst als ein Abbild der z–Achse auf, das durch eine Drehung um die y–Achse mit Winkel β und durch eine anschließende Drehung mit dem Winkel α um die z–Achse entsteht:

$$
n = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = R_z(\alpha) \cdot R_y(\beta) \cdot k = \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\sin(\beta) \\ \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \cos(\beta) \end{pmatrix}.
$$

Wie man sich leicht überlegt, erhalten wir umgekehrt die z–Achse aus n, indem wir zuerst wieder um den Winkel $-\alpha$ in z–Richtung und dann um $-\beta$ in y–Richtung zurückdrehen:

$$
k = R_y(-\beta) \cdot R_z(-\alpha) \cdot n\,.
$$

Nun drehen wir wie gewohnt mit dem Winkel φ um die z-Achse und drehen die z-Achse wieder in die zu n gehörige Drehachse zurück:

$$
R_{n,\varphi} = R_z(\alpha) \cdot R_y(\beta) \cdot R_z(\varphi) \cdot R_y(-\beta) \cdot R_z(-\alpha)\,.
$$

Wir können die Drehung also auf eine Verkettung von Elementardrehungen zurückführen. Mit der Substitution $c = \cos(\varphi), s = \sin(\varphi)$ und $n = (n_1, n_2, n_3)$

errechnet sich die Hintereinanderausführung der Drehungen zu:

$$R_{n,\varphi} = \begin{pmatrix} c + n_1^2(1-c) & n_1n_2(1-c) - sn_3 & n_1n_3(1-c) + sn_2 \\ n_1n_2(1-c) + sn_3 & c + n_2^2(1-c) & n_2n_3(1-c) - sn_1 \\ n_1n_3(1-c) - sn_2 & n_2n_3(1-c) + sn_1 & c + n_3^2(1-c) \end{pmatrix}.$$

Jetzt haben wir jede Art von Rotation im $\mathbb{R}^3$ als eine 3x3-Matrix dargestellt. Nun stellt sich die Frage, wie wir Quaternionen zur Darstellung von Drehungen benutzen können. Die effizienteste Möglichkeit ist die sogenannte Halbwinkelform, wie sie von den komplexen Zahlen bereits bekannt ist. Wir definieren zunächst:

$$q = \cos(\frac{\varphi}{2}) + \sin(\frac{\varphi}{2})n = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3$$

mittels des Halbwinkels $\frac{\varphi}{2}$. Mit dieser Notation lässt sich die Drehung $R_{n,\varphi}$ wie folgt beschreiben:

$$R_{n,\varphi} = R(q) = \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix}.$$

Unser Ziel war es, eine Formel zu finden, die ausschließlich auf der Verwendung von Quaternionen basiert. In der Tat haben wir eine solche geschlossene Formel für die Drehung im $\mathbb{R}^3$ gefunden:

$$w = qv\bar{q},$$

wobei wieder $q = \cos(\frac{\varphi}{2}) + \sin(\frac{\varphi}{2})n$. Ist diese Formel nicht ein würdiger Abschluss für unsere Anstrengungen, die es sich zum Ziel gesetzt hatten, eine "schöne" Formel für Drehungen im $\mathbb{R}^3$ zu finden?

Da diese Formel das vorliegende Problem so unglaublich leicht löst, möchten wir das Resultat an dieser Stelle noch explizit verifizieren: schreibt man $v = iv_1 + jv_2 + kv_3$ dann ist:

$$w = qv\bar{q} = q(iv_1\bar{q} + jv_2\bar{q} + kv_3\bar{q}) = v_1qi\bar{q} + v_2qj\bar{q} + v_3qk\bar{q}\,.$$

Wir können uns für den Beweis der Äquivalenz der Matrixdarstellung $R(q)$ und der quaternionischen Formel also auf den Nachweis der Äquivalenz für die einzelnen imaginären Einheiten i, j und k beschränken. Zunächst gilt

$$w = R(q)i = \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) \end{pmatrix}$$

Andererseits ist:

$$\begin{aligned}
w &= qi\bar{q} \\
&= (q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3)i(q_0 - iq_1 - jq_2 - kq_3) \\
&= (iq_0 - q_1 - kq_2 + jq_3) \cdot (q_0 - iq_1 - jq_2 - kq_3) \\
&= iq_0^2 - q_0q_1 - kq_0q_2 + jq_0q_3 + q_1q_0 + iq_1^2 + jq_1q_2 + kq_1q_3 - kq_2q_0 + jq_2q_1 \\
&\quad -iq_2^2 + q_2q_3 + jq_3q_0 + kq_1q_3 - q_2q_3 - iq_3^2 \\
&= i(q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2) + j(2 \cdot (q_0q_3 + q_1q_2)) + k(2 \cdot (q_1q_3 - q_0q_2))\,,
\end{aligned}$$

also haben wir $R(q)i = qi\bar{q}$ bewiesen. Die Rechnung für j und k ist analog.

9 Anwendung: ”The Rolling Ball”

Wenn man eine gerade Fläche auf einen Ball legt und diese parallel zur Unterfläche im Uhrzeigersinn dreht, so bewegt sich ein Punkt auf dem Ball gegen den Uhrzeigersinn um seine vertikale Achse. Um die Bewegung mathematisch zu beschreiben, vergrößern wir den Winkel der jeweiligen Drehungen auf 90 Grad. Wir legen dafür ein Koordinatensystem in den Ball. Der Mittelpunkt ist der Koordinatenursprung, die x-Achse liegt horizontal nach rechts, die y-Achse vertikal und die z-Achse horizontal nach vorne. Wir können nun eine Drehung um die y-Achse auch durch Drehungen um die x- und z-Achsen darstellen.

In der Halbwinkelform $w = qv\bar{q}$ ist die Drehung um z-Achse um $-90°$ gegeben durch die Quaternion

$$q_1 = \cos(\frac{-90°}{2}) + \sin(\frac{-90°}{2})k = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}k\,,$$

die Drehung um x-Achse um $90°$ durch

$$q_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

und die Drehung um z-Achse um $90°$ durch

$$q_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}k\,.$$

Außerdem ist die Drehung um y-Achse um $90°$ gegeben durch

$$q_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j\,.$$

Um zu zeigen, dass die Hintereinanderausführungen der Drehungem um die x– und die z–Achse eine Drehung um die y–Achse sind, müssen wir also $q_3 \cdot q_2 \cdot q_1 = q_4$ zeigen. Mit dem Beispiel (5.1) haben wir

$$\begin{aligned} q_3 q_2 q_1 &= \frac{1}{2} q_3 (1 + i + j - k) = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+k)(1+i+j-k) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(1+j) \qquad = q_4 \,. \end{aligned}$$

10 Anderes

Mit Quaternionen lassen sich auch einige andere Experimente wie beispielsweise Diracs Gürtel oder Phänomene wie der „Gimbal lock“ erklären.

Extensive Anwendung finden Quaternionen auch in der Programmierung von 3D-Computerspielen, da sich Drehungen im Raum besonders leicht und effizient mit Quaternionen beschreiben lassen.

Literatur

[1] Ebbinghaus et al., Zahlen, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[2] A. Hanson, Visualizing Quaternions, Elsevier, San Francisco, 2006.