Ausgewählte Kapitel des Mathematikunterrichts

Dynamische Geometrie mit dem Metallbaukasten oder einer Software?

Seminar für M. Ed. Studierende im Sommersemester 2019

Inhalt

1. **Einführung (i-iii); Körpernetze (a), Arten der Winkel (b), Entstehung der Parallelen (c), Parallelverschiebung(d), Abstand zwischen Parallelen (e), Konstruktion eines zu einem anderen symmetrisch liegenden Punktes (f), Reflexionsgesetz (g) (18.04.2019)**

i. <u>Geschichte der Baukästen</u>

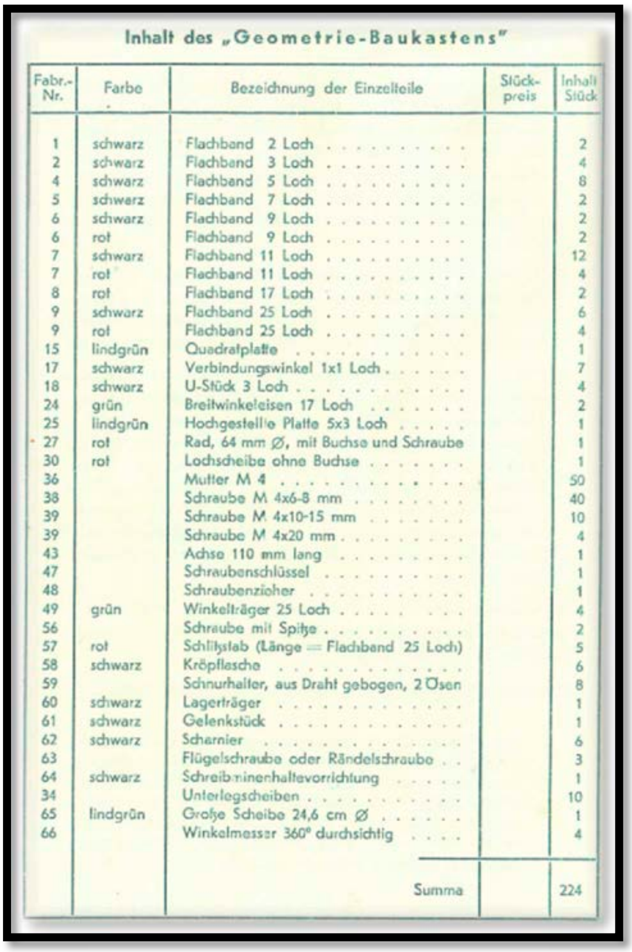
Im Deutschen Museum in München beschäftigt sich eine eigene Ausstellung mit der Geschichte der technischen Baukästen, ihren Spielmöglichkeiten und ihrer Verwendung für die Nachbildung der gebauten und technischen Umwelt. Beispielhaft wird der Zusammenhang zwischen Architektur, Technik und Spiel gezeigt. Auch gesellschaftlich wichtige Themen wie die Bedeutung der Baukästen als Lernmaterialen werden behandelt. Ein Platz mit den wichtigsten Bauelementen, die der Pädagoge Friedrich Fröbel, der Vater der Baukästen, entwickelt hat, führt zu den vier Haupträumen der Ausstellung. Je einer ist den Holz-, Keramik-, Metall- und Kunststoffbaukästen gewidmet.

https://deutsches-museum.de/ausstellungen/werkstoffe-energie/spielzeug/

ii. <u>Thale Metallbaukasten</u>

Technische Hinweise für das zweckmäßige Zusammenfügen der Baukastenteile:

- Sollen Flachbänder oder Schlitzstäbe unverrückbar senkrecht aufeinander stehen, so legt man vor dem Zusammenschrauben zwischen sie eine Kröpflasche, ein kleines quadratförmiges Blech, dessen Ränder nach zwei verschiedenen Seiten umgebogen sind.
- Alle Gleitvorgänge werden durch die Schlitzstäbe ermöglicht. Die hochgebogenen Ränder einer Kröpflasche dienen häufig als „Führung“, sie verhindern auch das Ausweiten des Schlitzes in der Mitte des Schlitzstabes.
- Um den Nullpunkt des Winkelmessers unter Umständen festlegen zu können, ist der Winkelmesser außer im Mittelpunkt auch auf dem 0-Grad-Strahl durchlocht. Er kann so mit einem Flachband verschraubt werden.



Inhalt des „Geometrie-Baukastens"

Fabr.-Nr.	Farbe	Bezeichnung der Einzelteile	Stück-preis	Inhalt Stück
1	schwarz	Flachband 2 Loch		2
2	schwarz	Flachband 3 Loch		4
4	schwarz	Flachband 5 Loch		8
5	schwarz	Flachband 7 Loch		2
6	schwarz	Flachband 9 Loch		2
6	rot	Flachband 9 Loch		2
7	schwarz	Flachband 11 Loch		12
7	rot	Flachband 11 Loch		4
8	rot	Flachband 17 Loch		2
9	schwarz	Flachband 25 Loch		6
9	rot	Flachband 25 Loch		4
15	lindgrün	Quadratplatte		1
17	schwarz	Verbindungswinkel 1x1 Loch		7
18	schwarz	U-Stück 3 Loch		4
24	grün	Breitwinkeleisen 17 Loch		2
25	lindgrün	Hochgestellte Platte 5x3 Loch		1
27	rot	Rad, 64 mm Ø, mit Buchse und Schraube		1
30	rot	Lochscheibe ohne Buchse		1
36		Mutter M 4		50
38		Schraube M 4x6-8 mm		40
39		Schraube M 4x10-15 mm		10
39		Schraube M 4x20 mm		4
43		Achse 110 mm lang		1
47		Schraubenschlüssel		1
48		Schraubenzieher		1
49	grün	Winkelträger 25 Loch		4
56		Schraube mit Spitze		2
57	rot	Schlitzstab (Länge = Flachband 25 Loch)		5
58	schwarz	Kröpflasche		6
59		Schnurhalter, aus Draht gebogen, 2 Ösen		8
60	schwarz	Lagerträger		1
61	schwarz	Gelenkstück		1
62	schwarz	Scharnier		6
63		Flügelschraube oder Rändelschraube		3
64	schwarz	Schreibminenhaltevorrichtung		1
34		Unterlegscheiben		10
65	lindgrün	Große Scheibe 24,6 cm Ø		1
66		Winkelmesser 360° durchsichtig		4
		Summa		224

iii. Heft von Dr. Rudolf Bellin

Titel	Methodische Verbesserung des Geometrieunterrichts durch vielseitige Verwendung von Anschauungsmitteln aus Normteilen - Lesung vor dem Pädagogischen Kreiskabinett Neuruppin am 3.12.1957
Autor	Dr. Rudolf Bellin
Verlag	Berlin: Volk und Wissen Verlag
Erscheinungsjahr	1959
Format	132 Seiten
Bibliothek „HU“	ZwB Naturwissenschaften – Freihandbestand - SM 613 B444

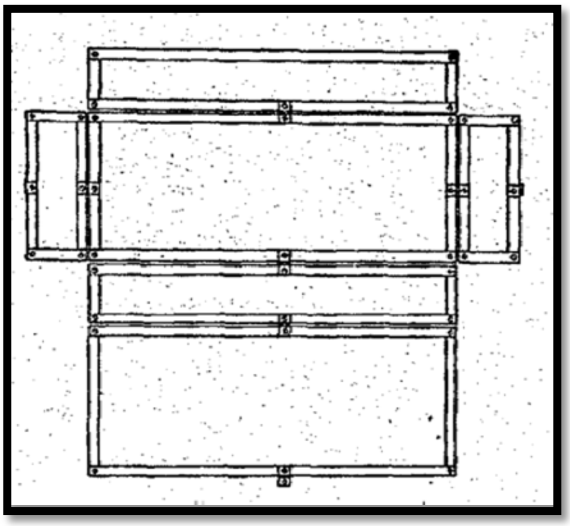
Die Pädagogischen Lesungen sind Abhandlungen aus der DDR, die aus der praktischen Schul- und Unterrichtsarbeit von Lehrkräften entstanden, häufig Erfahrungsberichte, und die einmal jährlich beurteilt und prämiert wurden.

Die Arbeiten wurden von Lehrkräften für Lehrkräfte erstellt. Sie dienten dem Erfahrungsaustausch und wurden gleichzeitig als eine gute Möglichkeit gesehen, Praktikerinnen und Praktiker in die pädagogische Forschung miteinzubeziehen. Die Erarbeitung und Verbreitung der Pädagogischen Lesungen sollte die Weiterentwicklung der sozialistischen Bildungs- und Erziehungsarbeit fördern. Vorwärtsweisende und verallgemeinerungswerte gute Erfahrungen des Unterrichtens sollten einem großen Kreis von Kolleginnen und Kollegen zugänglich gemacht werden. Die Pädagogischen Lesungen wurden vielfach in Weiterbildungskursen verwendet. Auf den jährlich stattfindenden Tagen der Pädagogischen Lesungen wurden die besten Lesungen öffentlich vorgetragen und verteidigt. Einzelne pädagogische Lesungen wurden zusätzlich von den Bezirkskabinetten für Weiterbildung der Lehrer und Erzieher als Manuskript gedruckt und veröffentlicht.

https://bbf.dipf.de/de/sammeln-entdecken/besondere-bestaende-sammlungen/paedagogische-lesungen

Inhaltsverzeichnis

a. Körpernetze



1 Körpernetz eines Quaders (Bellin, S. 44)

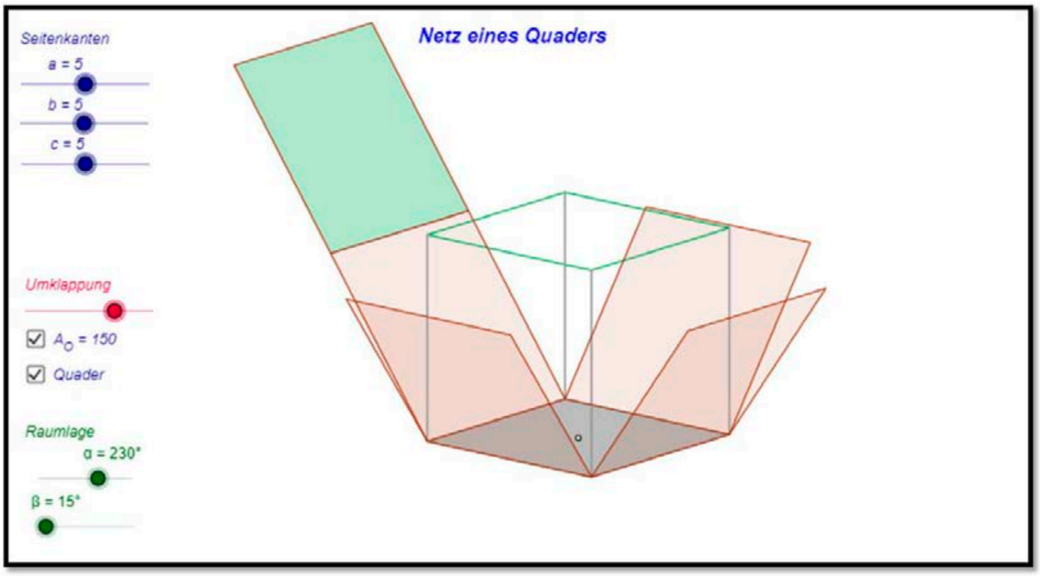
Körpernetze werden durch Scharniere zusammengehalten, so dass aus ihnen der Körper aufgebaut werden kann. Ein Verbindungswinkel hält zum Schluss zwei benachbarte Netzteile zusammen.

Körpernetze aus Karton sind meist instabil und nur mit großer Mühe zu kleben, diese Probleme gibt es bei Modellen mit Scharnieren nicht.

Ein aus dem Körpernetz zusammengefaltetes Körpermodell dient insbesondere dazu, das Vorgehen bei der Berechnung des Flächeninhalts der Oberfläche des Körpers zu veranschaulichen. Körpermodelle werden ebenfalls genutzt, um das räumliche Vorstellungsvermögen zu schulen und insbesondere

- Begriffe wie Ecke, Kante, Fläche zu veranschaulichen;
- die Bestimmung der Anzahl der Ecken, Anzahl der Kanten, eines Raumwinkels oder Eckengrads visuell zu unterstützen sowie
- die räumliche Lage von Raumdiagonale oder Körperhöhe besser zu verstehen oder die Geometrie von Schnittflächen zu untersuchen.

Körpernetze können auch in GeoGebra entworfen werden. Die Prozesse, die in der Blackbox GeoGebra ablaufen, sind allerdings nur schwer nachvollziehbar. Die im Hintergrund laufenden Algorithmen sind für die Schülerinnen und Schüler nicht ersichtlich.



2 Mögliche Umsetzung mit der dynamischen-Geometrie-Software GeoGebra

b. Arten der Winkel

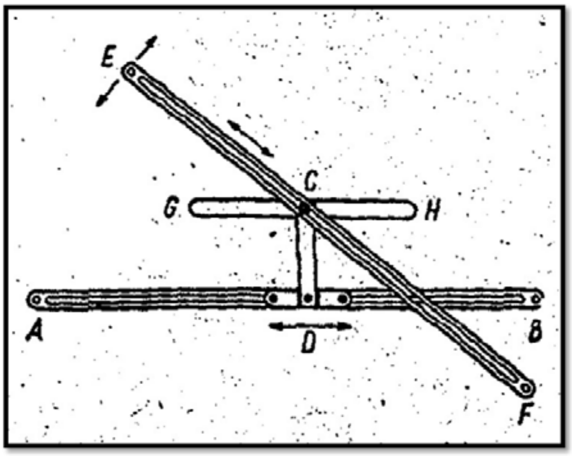
3 Arten der Winkel

Ausgangspunkt bildet der bekannte rechte Winkel. Entfernt man bei diesem die Kröpflasche, so können an diesem nunmehr beweglichen Modell die verschiedenen Arten der Winkel entwickelt werden.

Um das Arbeiten mit dem Modell noch freudvoller zu gestalten kann an dem Ende des einen Schenkels ein kleines Kopfprofil aus Pappe und an dem des anderen ein Fußprofil angeschraubt werden. Der „Mensch“ macht mit seinem Körper zunächst einen spitzen Winkel, richtet er sich weiter auf, so bildet er einen rechten Winkel, dann einen stumpfen, weiterhin einen gestreckten, wenn er sich auf der Erde ausgestreckt hat.

c. Entstehung der Parallelen

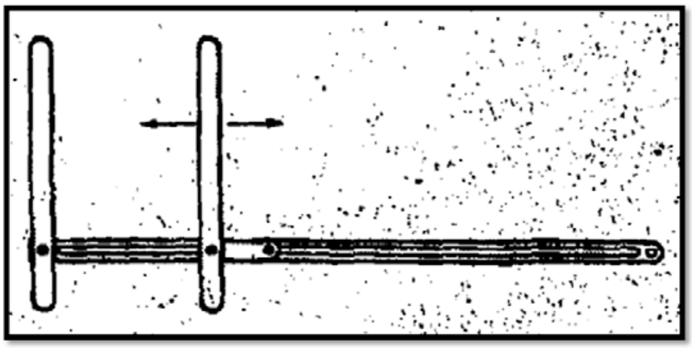
Dass parallele Geraden keinen Punkt gemeinsam haben kann man aus dem Modell Abb. 4 ableiten, indem man die Gerade um C dreht. Der Schnittpunkt der beweglichen Geraden mit der festen wandert immer weiter nach rechts. Das Modell zeigt auch, dass man durch einen außerhalb einer Geraden liegenden Punkt zu dieser Geraden nur *eine* Parallele ziehen kann.

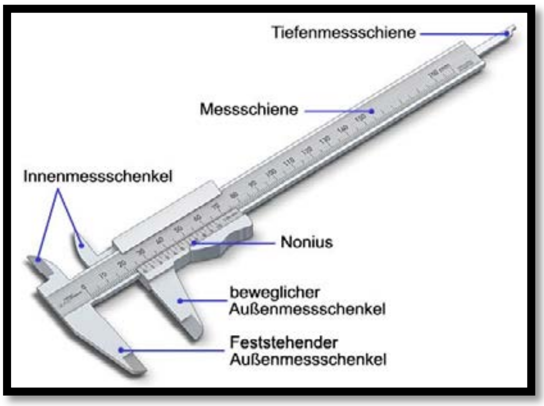


4 Entstehung der Parallelen (Bellin, S. 27)

d. Parallelverschiebung

Das Modell Abb. 6 zeigt das Prinzip der Schieblehre, die von Handwerken viel gebraucht wird.





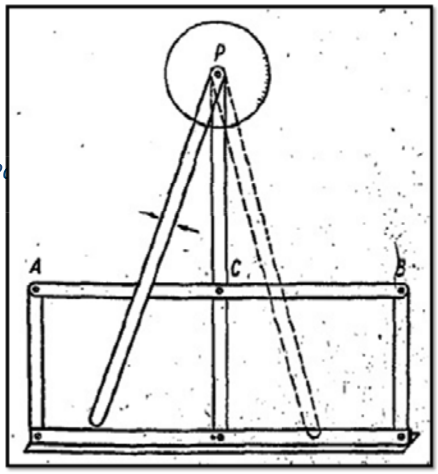
Der Messschieber (in Teilen Deutschlands auch Schieblehre oder Kaliber) ist ein Längen-Messgerät.

5 https://paulinenpflege.de/messschieber/seite3.htm

Abstand zwischen Parallelen

6 P

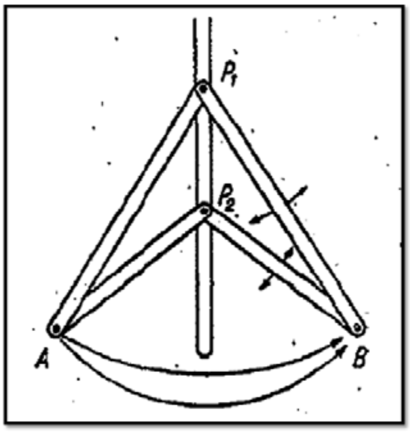
Lehrbücher empfehlen, durch Zeichnung und Messung festzustellen, dass der Abstand zwischen den Parallelen überall gleich groß ist und dass der Abstand, die kürzeste Verbindung zwischen den Parallelen ist. Das letztere kann, infolge der Möglichkeit, kontinuierliche Veränderungen vorzunehmen, gut am Modell festgestellt werden.



7 Abstand zwischen Parallelen (Bellin, S. 28)

e. Konstruktion eines zu einem anderen symmetrisch liegenden Punktes

Die von P1 und P2 ausgehenden Strecken legen den Punkt A (mit Schraube befestigen) fest. Über P1A bzw. P2A liegen je ein gleich langes Flachstück. Nun schlägt man mit ihnen Kreisbogen nach rechts; wo der Treffpunkt ist, liegt zwangsläufig B. Jetzt auch durch B eine Schraube ziehen! B liegt symmetrisch zu A, wie durch Klappung dahinter gelegten Papiers bestätigt wird.

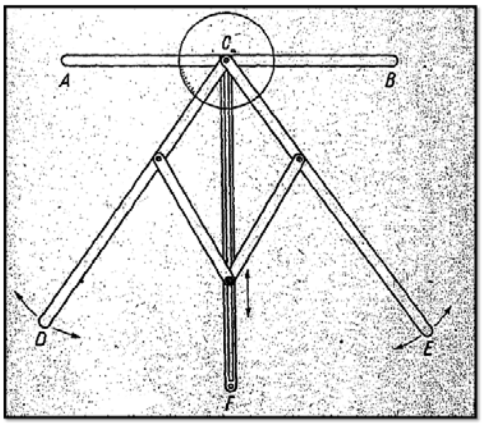


8 Konstruktion eines zu einem anderen symmetrisch liegenden Punktes (Bellin, S. 34)

Diese Eigenschaft lässt sich durch konkrete Spiegelung (z. B. durch Anlegen eines Taschenspiegels) oder Falten (z. B. bei geometrischen Mustern aus Papier) leichter überprüfen.

f. Reflexionsgesetz

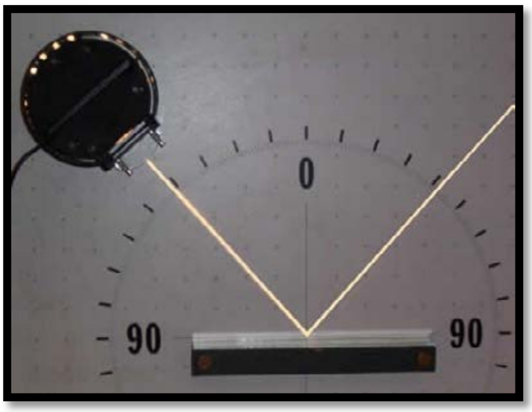
Das Reflexionsgesetz besagt, dass der Ausfallswinkel (auch Reflexionswinkel) genau so groß wie der Einfallswinkel ist und beide mit dem Lot in einer Ebene, der Einfallsebene, liegen.



9 Reflexionsgesetz (Bellin, S. 39)

Schöner ist es, wenn anstelle des Modells ein entsprechender Schülerversuch durchgeführt wird.

Ein sehr leicht durchzuführender Versuch zur Ausmessung der Winkel ist nebenstehend (Abb. 10) abgebildet. Der Spiegel wird horizontal an einer Metallwand von Magneten gehalten. Durch Verändern der Position der magnetisch gehaltenen Lampe können verschiedene Einfallswinkel eingestellt und die zugehörigen Reflexionswinkel abgelesen werden.



10 https://leifiphysik.de/optik/lichtreflexion/versuche

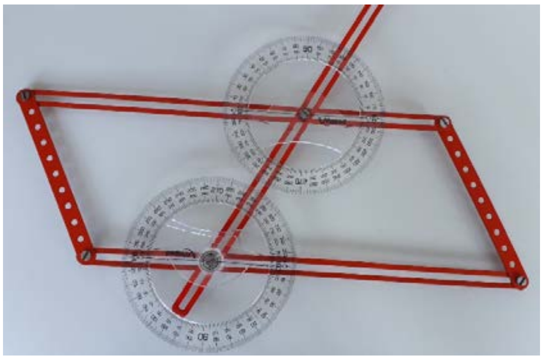
2. Winkel an Parallelen, Verschiebung, Winkelhalbierung und -dreiteilung, Kreisgeometrie (02.05.2019) (S. 40 – 52)

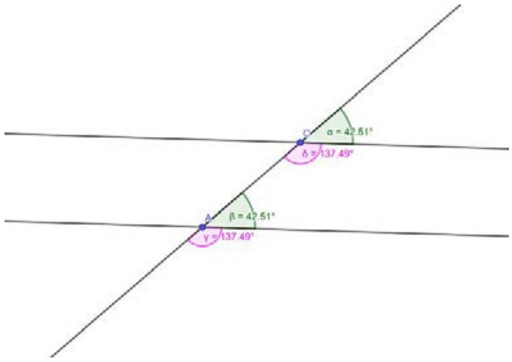
a. <u>Scheitel- und Nebenwinkel</u>

Erfahrungen, die mit diesem Aufbau gemacht werden können:

1. Nebenwinkel ergeben addiert 180°
2. Scheitelwinkel sind gleich groß

b. <u>Winkel an Parallelen</u>

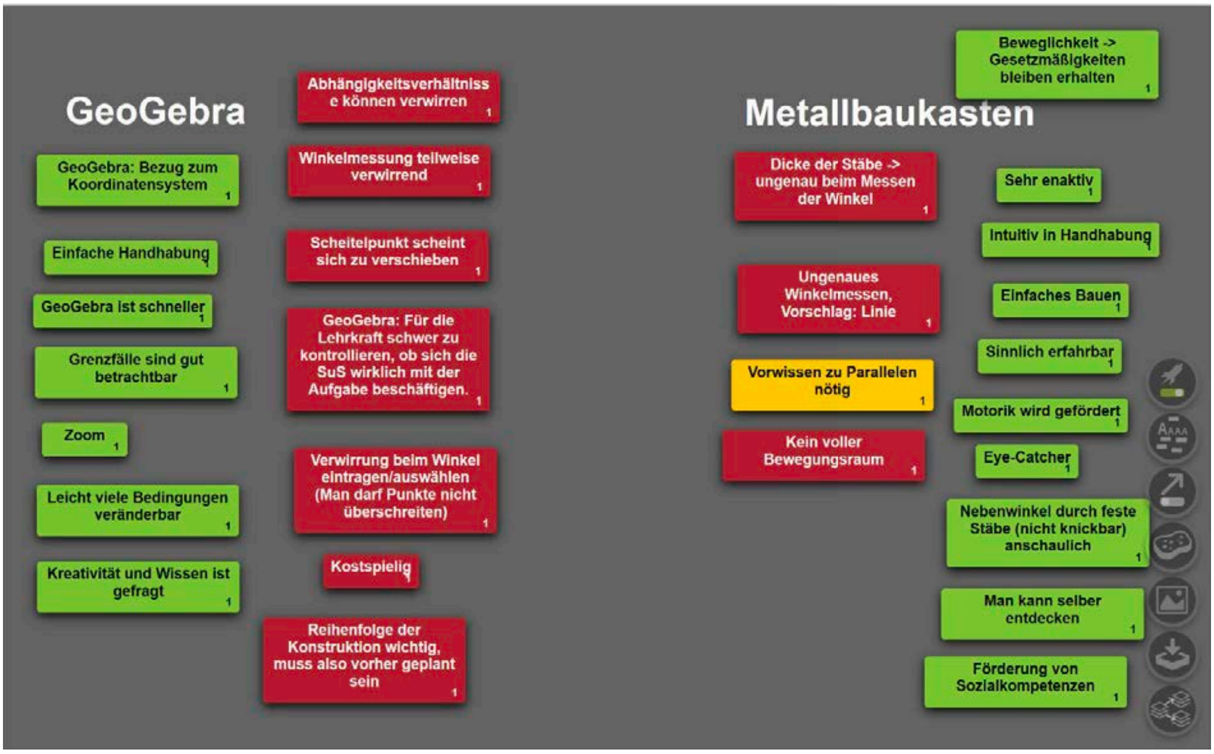




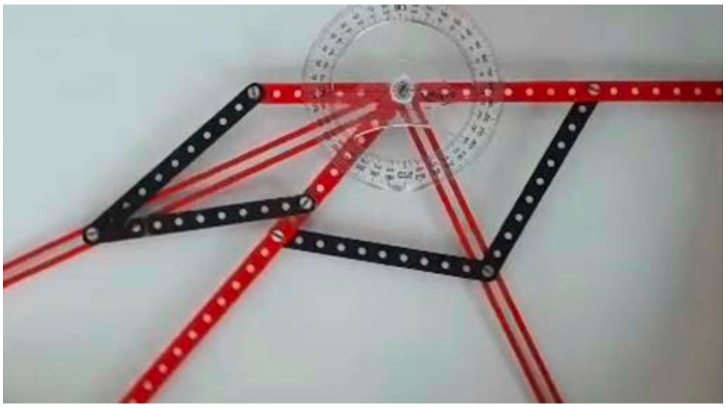
Erfahrungen, die an diesem Aufbau gemacht werden können:

1. Stufenwinkel sind gleich groß
2. Wechselwinkel sind gleich groß

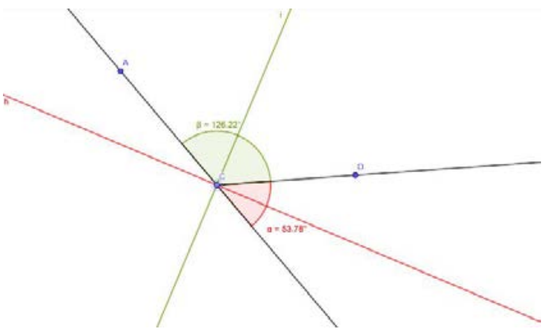
Welche Vor- und Nachteile gibt es bei der Arbeit mit GeoGebra vs. mit dem Metallbaukasten?



c. Winkelhalbierende von Nebenwinkel

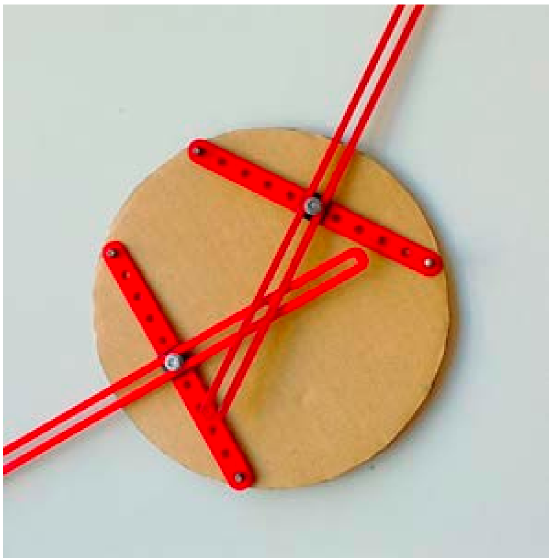


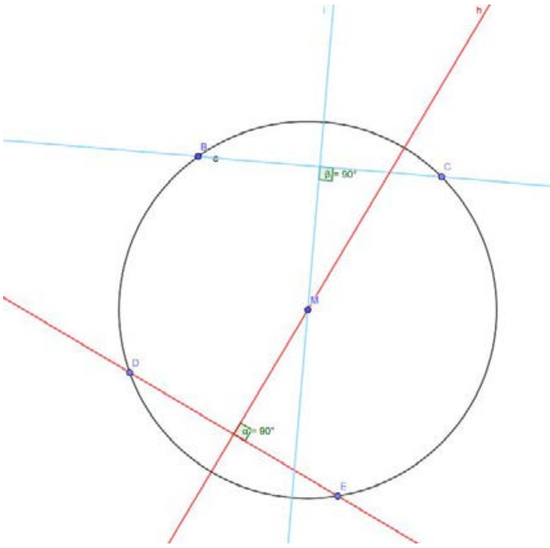
Was kann mit diesem Aufbau herausgefunden werden?



- Winkelhalbierende von Nebenwinkel stehen senkrecht zueinander

a. Mittelsenkrechte der Sehnen in einem Kreis

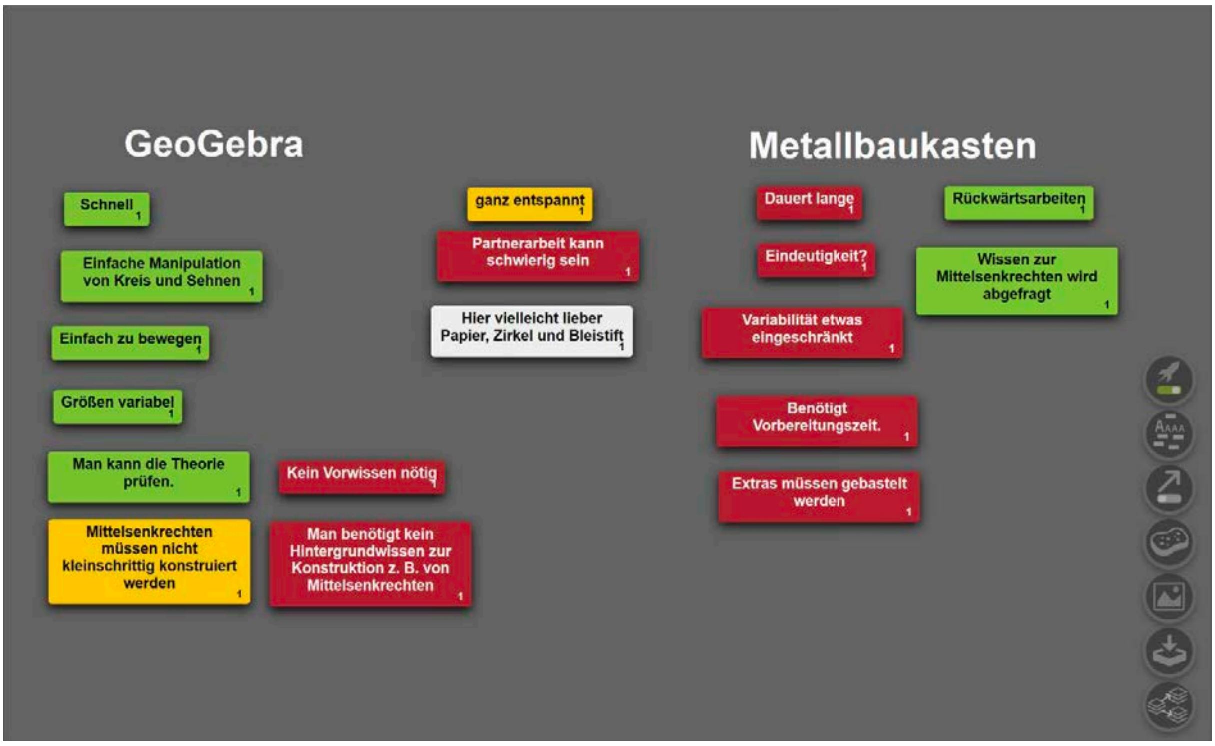




Erfahrungen, die mit diesem Aufbau gemacht werden können:

- Die Mittelsenkrechten zweier Sehnen eines Kreises, schneiden sich im Kreismittelpunkt.

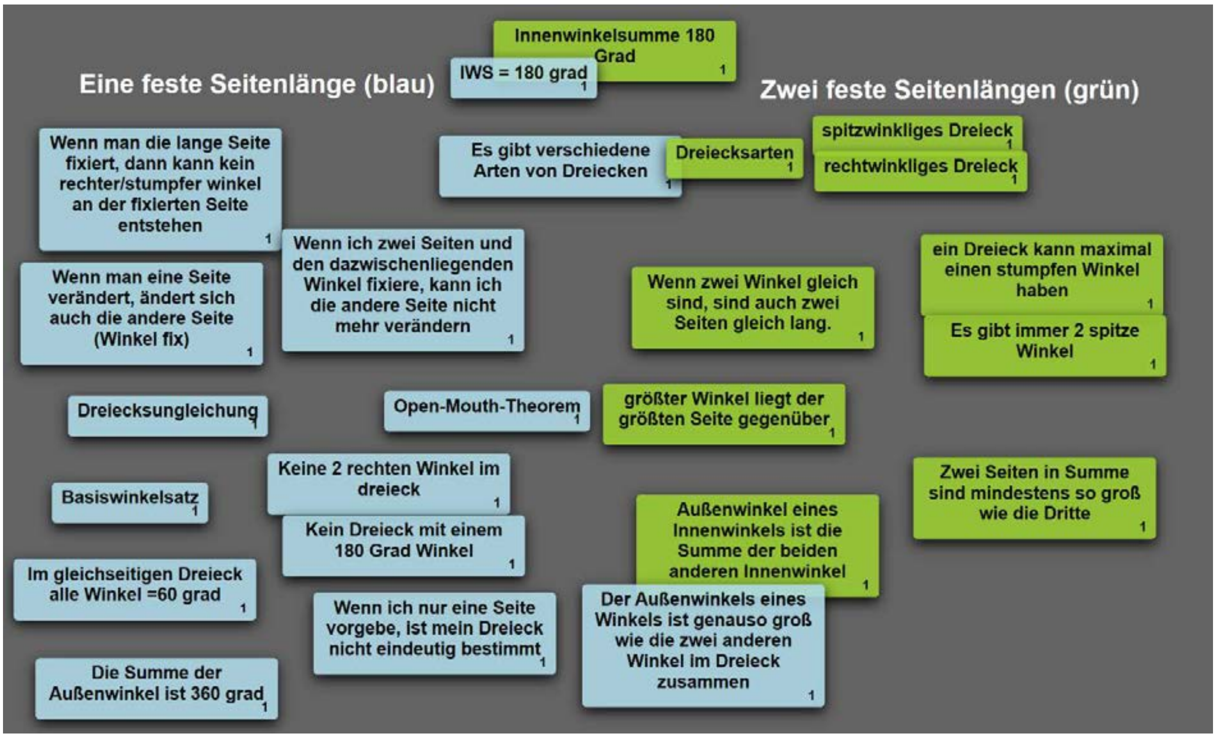
Vor- und Nachteile der Arbeit mit GeoGebra oder dem Metallbaukasten:



3. Arten von Dreiecken, Abhängigkeiten im Dreieck, Dreieckskonstruktionen (09.05.2019) (S. 54 – 62)

a. Baut verschiedene Dreiecke nach den Vorgaben eurer Gruppe (1. Dreiecke mit einer festen Seitenlänge; 2. Dreiecke mit zwei festen Seitenlängen) und untersucht, welche Eigenschaften und Zusammenhänge ihr an euren Dreiecken entdecken könnt.

Erkenntnisse:



b. Dynamische Dreiecke in der Umgebung

> **Definition**
>
> Wir nennen einen Mechanismus ein **variables Dreieck**, wenn genau zwei seiner insgesamt sechs Größen Seite, Seite, Seite und Winkel, Winkel, Winkel vorgegeben sind und (mindestens) eine dritte aktiv verstellbar[4] ist.

Sucht in der näheren Umgebung (in der Uni) nach solchen variablen Dreiecken.

Gefundene Beispiele:


Fenster Scharnier




Klappstuhl


Briefkastendeckel


Schiene

4. „Bestimmungslinien“, Gelenkvierecke, Kongruenzsätze, Mittelsenkrechte, Winkelhalbierende, Seitenhalbierende in Dreiecken

4.1 „Bestimmungslinien“

Definition:

Eine Bestimmungslinie ist eine Menge von Punkten, die alle eine gemeinsame Eigenschaft besitzen.

Beispiele:

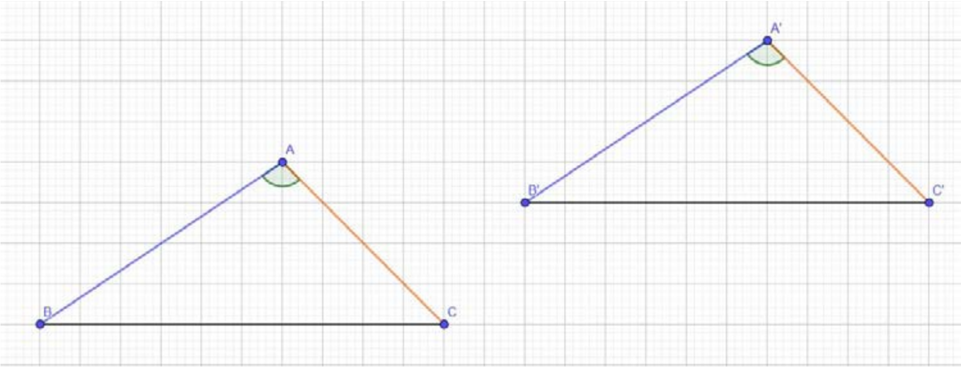
i. Kreis
ii. Parallele zu einer Geraden
iii. Mittelsenkrechte

4.2 Kongruenzsätze

a. SWS

Konguenzaxiom

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in der Länge zweier Seiten und in der Größe des von den beiden Seiten eingeschlossenen Winkels übereinstimmen.



Umsetzung mit dem Modellbaukasten:

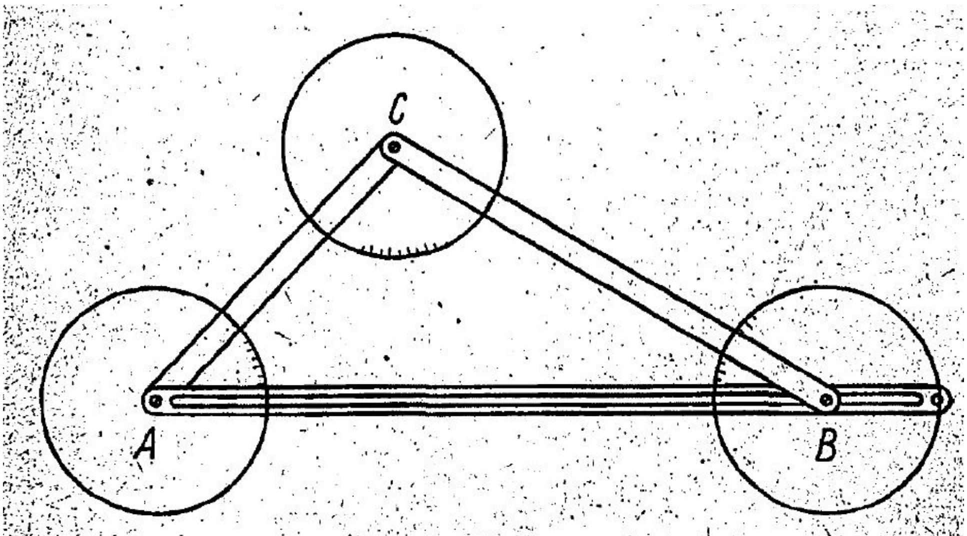
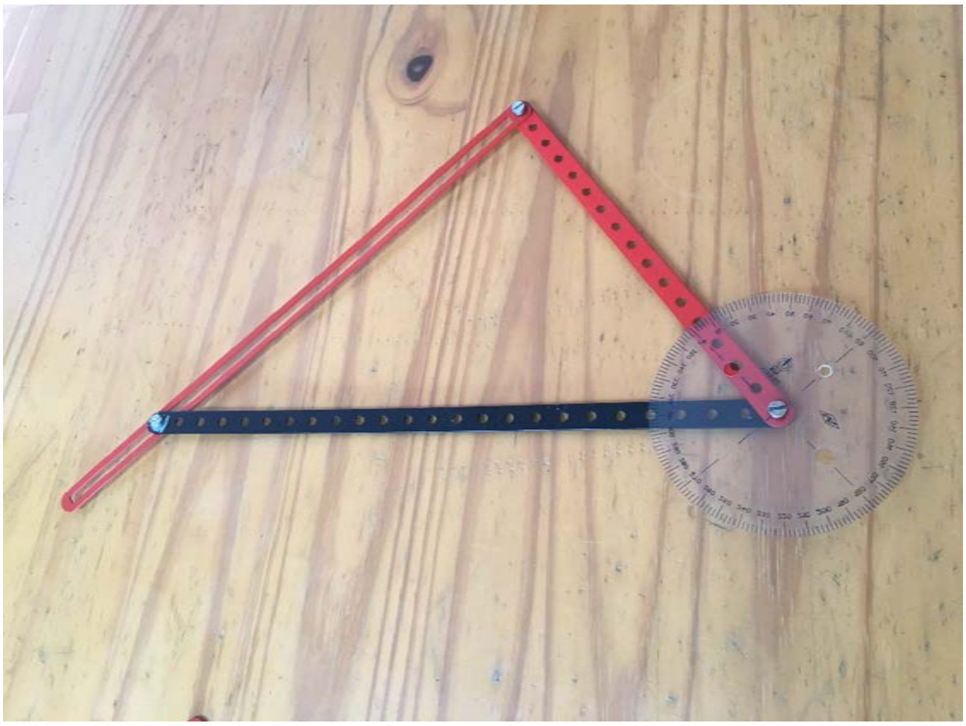


Abbildung 30

Nr. 110. Zweiter und dritter Kongruenzsatz: Das Demonstrieren der Kongruenzsätze mit Hilfe der Bewegung wird von manchen Methodikern (so tschechisches Lehrerkollektiv) für besonders wertvoll gehalten; sie halten aber meistens nicht scharf genug auseinander: Kongruenzbegriff und Kongruenzsatz. M. Draeger betont in seinem Aufsatz „Geometrische Verwandtschaften“[50] die Wichtigkeit, „daß zwischen Kongruenz*begriff* und Kongruenz*satz* klar unterschieden werden muß, das heißt, daß eingesehen werden muß, die Kongruenzsätze sind die die Untersuchung vereinfachenden Kriterien für das Vorliegen der Kongruenz“. Deshalb sind Vorübungen, am besten im Anschluß an eine praktische Vermessungsaufgabe, mit verschieden gestalteten Figuren – nicht nur Dreiecken – nötig, zum Beispiel Ausschneiden und Aufeinanderlegen kongruenter Figuren oder Parallelverschiebung und andere Bewegungen mit kongruenten Figuren, um als erstes den Kongruenzbegriff voll zum Bewußtsein zu bringen, dann erst werden auf Grund der eindeutigen Bestimmtheit gewisser Dreieckskonstruktionen die Kongruenzkriterien, das heißt, der Inhalt der Kongruenzsätze, zusammengestellt. – Wir benutzen noch einmal Modell 85 (Abb. 30) oder Modell 90. Hier sind zwei Seitenlängen konstant. Durch die Veränderung der Größe des „eingeschlossenen“ Winkels erhalten wir sehr viel verschiedene Dreiecke. Erst die Festlegung der Größe des Winkels durch ein Flachband zwischen den Schenkeln ergibt eine bestimmte Form, die der Banknachbar auch erhält, desgleichen auch sämtliche Schüler. Somit erscheint hier als Kriterium für die Kongruenz die Übereinstimmung aller Dreiecke in zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlosse-

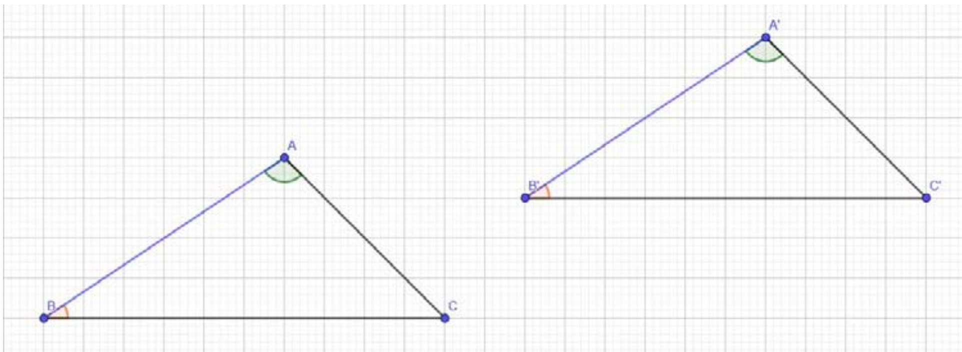
Verbesserungsvorschläge des Modells:



Ein Winkelmesser halten wir hier für ausreichend, da bei SWS nur ein Winkel fest definiert wird.

b) WSW

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in der Größe zweier Winkel und in der Länge der von den Winkeln eingeschlossenen Seite übereinstimmen.



Umsetzung mit dem Modellbaukasten:

Mit Abbildung 40

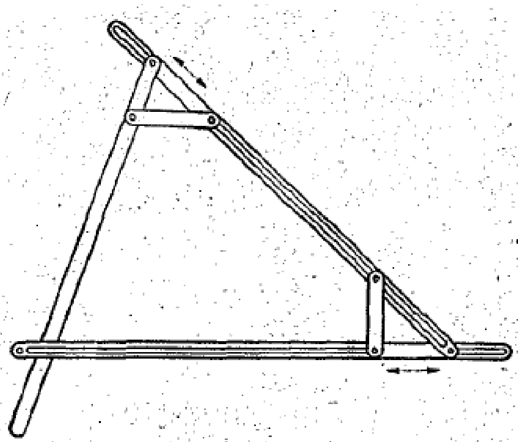
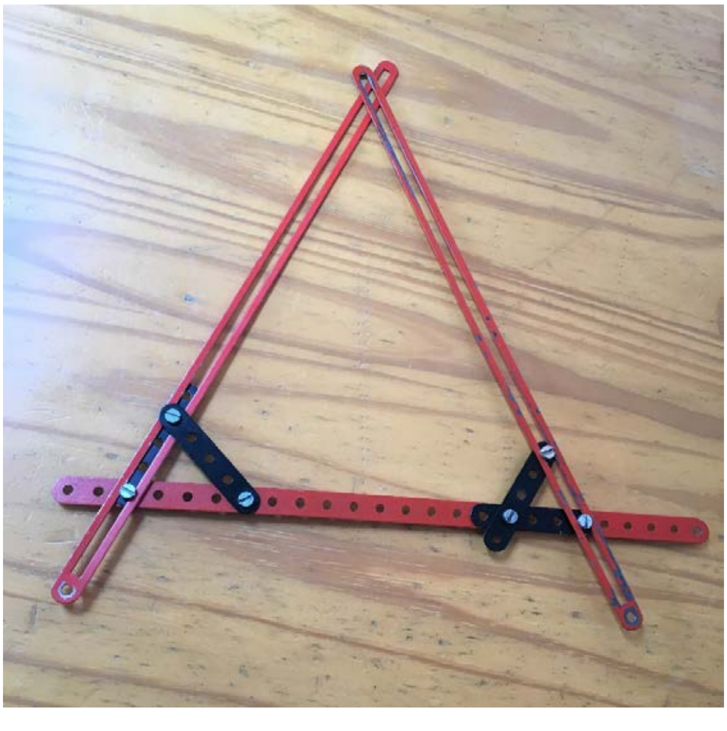


Abbildung 40

kann dann auf ähnliche Weise der dritte Kongruenzsatz bezüglich des hier bestehenden Kriteriums erarbeitet werden: Zwei gleichliegende Winkel bleiben konstant, die Größe irgendeiner Seite ist vorerst noch variabel. Erst die Festlegung der jeweils vorher veränderbaren Seite ergibt die Kongruenz.

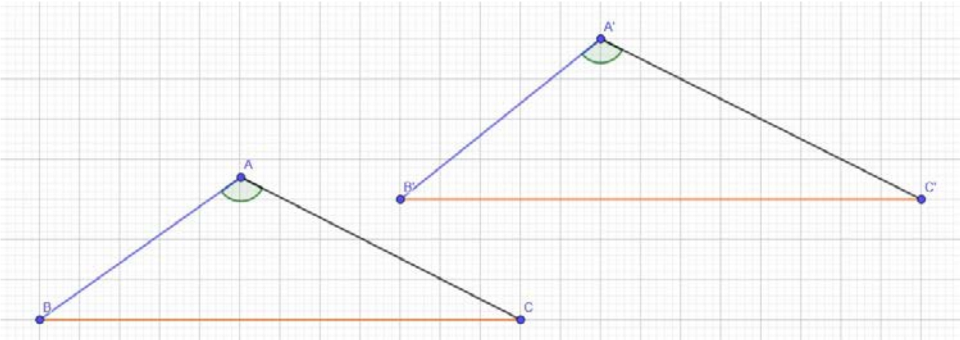
Verbesserungsvorschläge des Modells:

Hier ist die Seite zwischen den Winkeln nun fixiert. Vorher war die Seite zwischen den Winkeln leider nicht fest fixiert.



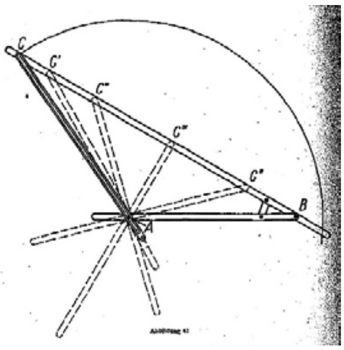
c) SsW

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in der Länge zweier Seiten und in der Größe des Winkels, der der längeren Seite gegenüberliegt, übereinstimmen.



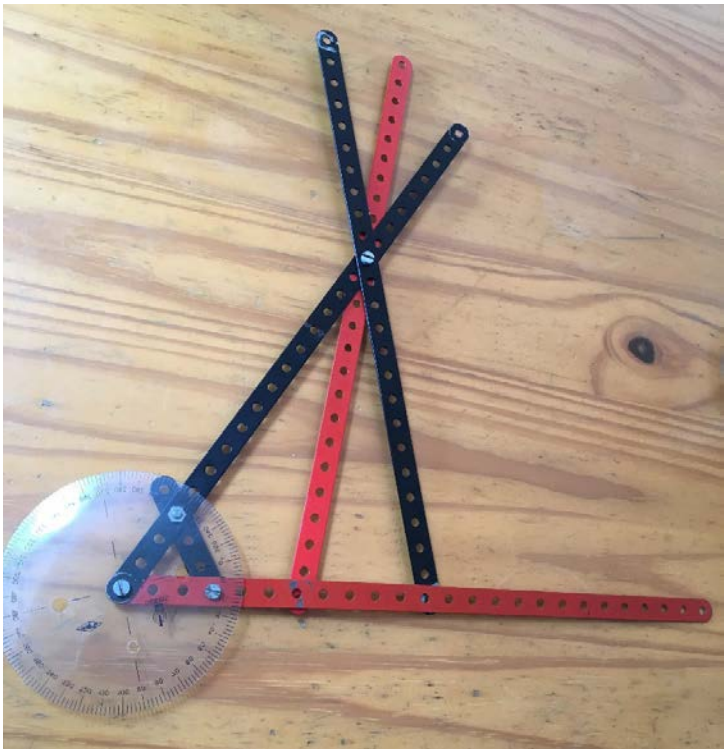
Umsetzung mit dem Modellbaukasten:

Nr. 111. Vierter Kongruenzsatz (Abb. 41): Eine Seite *(AB)* und ein Winkel (β) sind konstant. Ist die Seite b sehr klein (kleiner als *AB* · sin β), so ist kein Dreieck möglich. Läßt man Seite b wachsen, so ist zunächst ein rechtwinkliges Dreieck möglich. Bei weiterem Wachsen erhält man zwei Schnittpunkte *C*, also auch zwei verschiedene Dreiecke. *Eine* eindeutig bestimmte Form erhält man erst wieder dann, wenn Seite b *(AC)* größer wird als Seite c *(AB)*, der gegebene Winkel β also der größeren Seite gegenüberliegt. Bei gegebenem c, β und b gibt es also 0, 1 oder 2 Lösungen. Wenn wir eindeutige Bestimmtheit haben wollen, muß entweder b gleich dem Lot von *A* auf den freien Schenkel des Winkels β sein oder b muß größer als c sein. Da wir *allgemeine* Kriterien wünschen, bleibt nur b größer als c für Eindeutigkeit.



Verbesserungsvorschläge für das Modell:

Der fixierte Winkel sollte durch einen Winkelmesser messbar gemacht werden. Außerdem würden wir vorschlagen, den Schlitzstab mit Flachbändern zu ersetzen, damit das Prinzip mit den 2 Schnittpunkten klar wird (siehe Bild).



Fazit:

Um die Kongruenzsätze zu entdecken eignet sich der Modellbaukasten eher weniger, da hier ja nicht mit dynamischen Prozessen gearbeitet wird, sondern einfach nur die „Festlegung" des Dreiecks durch 2 Größen dargestellt wird. Außerdem ist bei den einzelnen Modellen nicht immer eindeutig, welcher Kongruenzsatz dargestellt werden soll.

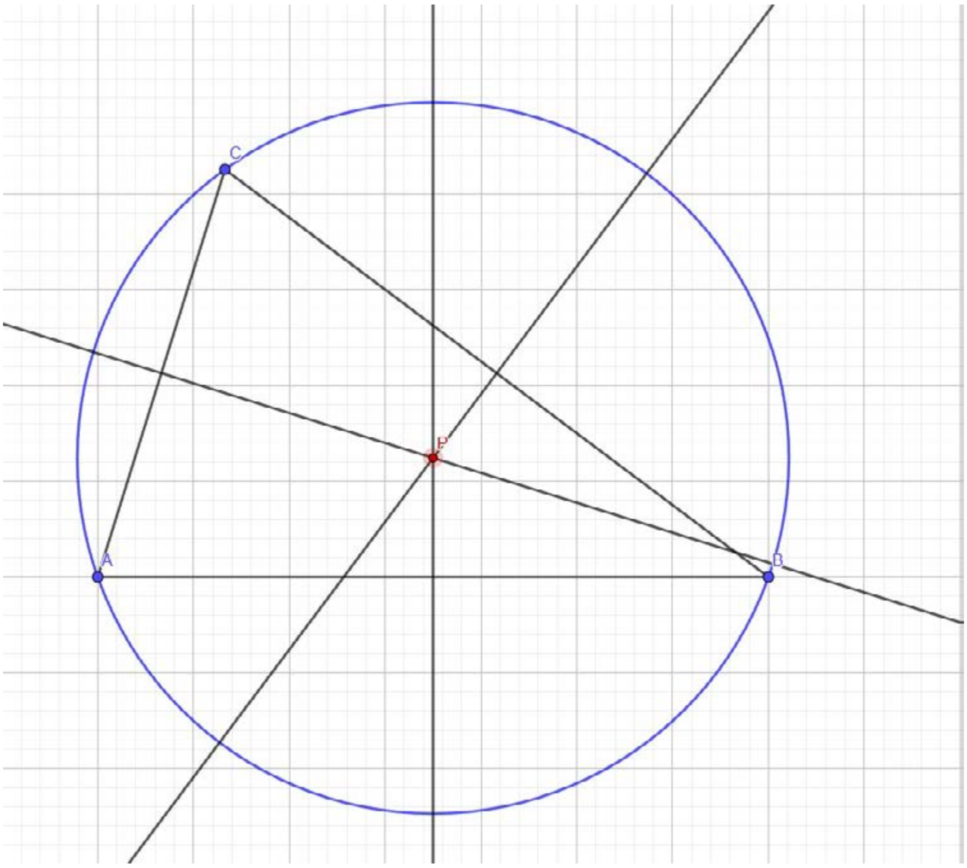
Die Modelle könnten aber bei der Themeneinheit Konstruktionsbeschreibung behilflich sein.

4.3 Schnittpunkte im Dreieck

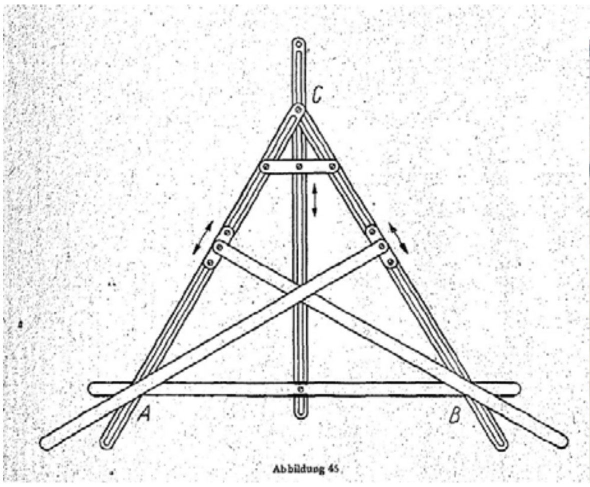
a) Mittelsenkrechte

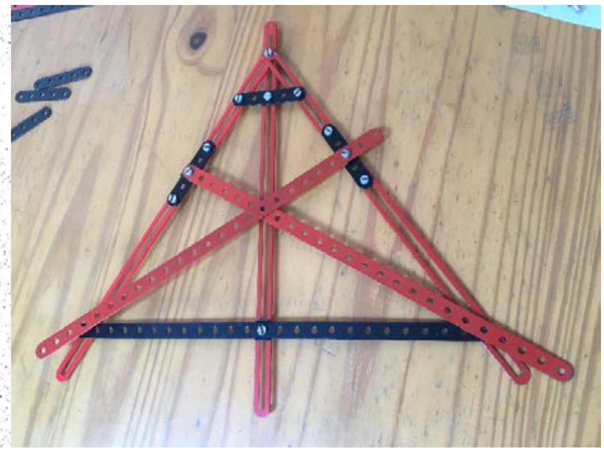
Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks sind die Mittelsenkrechten der Dreiecksseiten. Die drei Mittelsenkrechten schneiden einander in genau einem Punkt. Dieser Punkt ist der Mittelpunkt eines Kreises, auf dem alle Eckpunkte des Dreiecks liegen. Man nennt diesen Kreis den Umkreis des Dreiecks.

Umsetzung mit GeoGebra:



Umsetzung mit dem Modellbaukasten:





Nr. 116. Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten (bzw. Höhen) im gleichseitigen Dreieck: An einem Sonderfall, dem gleichseitigen Dreieck, wird zunächst das Problem bezüglich der drei Mittelsenkrechten beziehungsweise Höhen gewonnen (Abb. 45); die Schüler sehen, wenn man das gleich-

seitige Dreieck wachsen läßt, daß sich auch die Mittelsenkrechten (bzw. Höhen) verändern, aber stets in einem Punkte schneiden, der von den Ecken doppelt so weit entfernt ist wie von den Seiten (Mittelpunkt des Umkreises u. U. erwähnen!). Von diesem Sonderfall ausgehend, untersucht man nun das Verhalten dieser besonderen Linien im allgemeinen Dreieck, oder man kann auch umgekehrt vorgehen und im Anschluß an die Behandlung des allgemeinen Falles am besonderen Fall des gleichschenkligen und gleichseitigen Dreiecks zeigen, wie hier jeweils einige oder alle Linien identisch sind.

Vor- und Nachteile des Modells:

Der dynamische Aspekt ist in diesem Modell leider nicht gut umsetzbar, da das Verschieben immer mit einem Ausmessen des Mittelpunktes einhergehen muss. Da das Messen meist etwas umständlich ist, kann es hier zu Fehlern kommen.

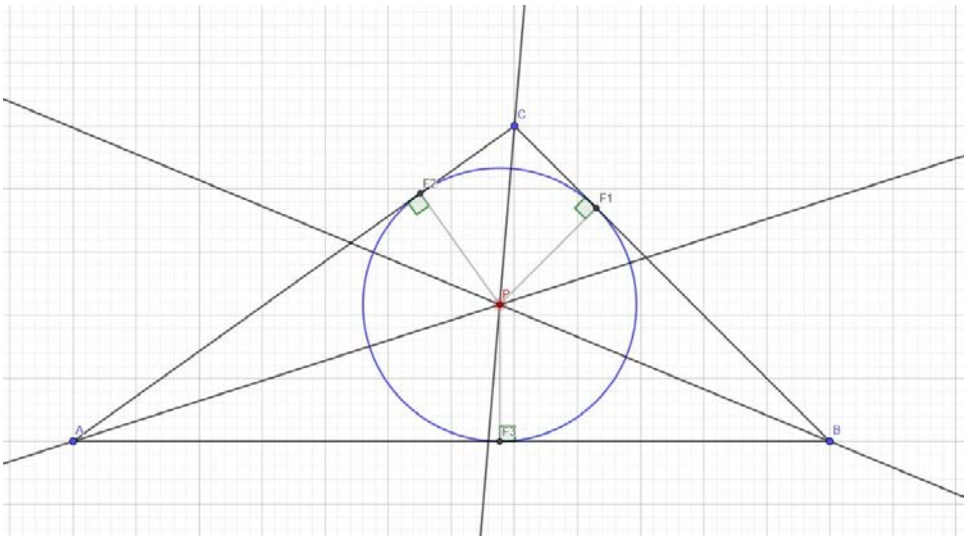
Zusätzlich ist die orthogonale Lage der Mittelsenkrechten auf der Dreiecksseite sehr wackelig und auch mit den Kröpflaschen nur bedingt umzusetzen.

Die Eigenschaft des Schnittpunktes als Mittelpunkt des Außenkreises ist mit dem Metallbaukasten leider auch nicht gut zu entdecken.

b) Schnittpunkt der Winkelhalbierenden:

Die Winkelhalbierenden halbieren die drei Innenwinkel des Dreiecks. Die drei Winkelhalbierenden schneiden einander in genau einem Punkt. Dieser Punkt ist Mittelpunkt des Kreises, der die drei Dreiecksseiten von innen berührt. Man nennt deshalb diesen Kreis den Inkreis des Dreiecks.

Umsetzung mit Geogebra:



Umsetzung mit dem Modellbauskasten:

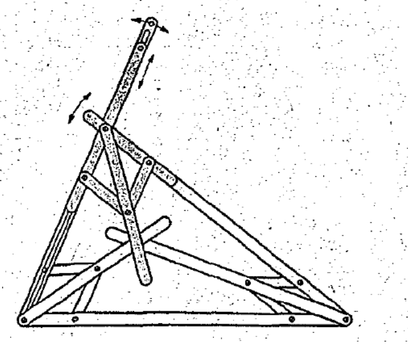


Abbildung 44

Nr. 115. Schnittpunkt der drei Winkelhalbierenden eines Dreiecks: Die Lehrsätze über die besonderen Linien der Dreiecke (gemeint sind hier nur die wichtigsten merkwürdigen Punkte) sollen jetzt im Unterricht doch wieder untersuchten Rothschen Anregungen, die ich für zu kompliziert halte) mit meiner Ansicht decken. Nur lege ich noch mehr Wert auf die Problemgewinnung und -erfassung, die durch das hier vorgeschlagene Modell (Abb. 44) erfolgen kann: Die gestrichelten Teile sind über der linken Dreiecksseite so verschiebbar und sind so einzustellen, daß bei jeder Stellung der beiden beweglichen Dreiecksseiten dieses bewegliche Teil in die Richtung der rechten Dreiecksseite weist. Stets zeigt sich, daß auch die dritte Winkelhalbierende durch den jeweiligen Schnittpunkt der beiden anderen geht. Warum das so sein muß, wird nun in der von H. Titze vorgeschlagenen Form bewiesen. Jeglicher „Mausefallenbeweis“ ist so vermieden.

Vor- und Nachteile des Modells:

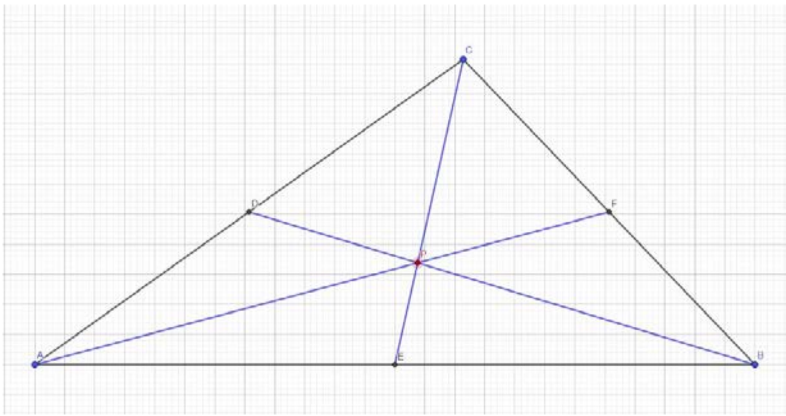
Der Aufbau des Modells ist sehr zeitaufwendig, kann für SuS mit Bastelaffinität aber auch als Herausforderung gesehen werden.

Leider lässt sich mit dem Metallbaukasten die Eigenschaft des Innenkreises nicht ableiten. Die Dynamik des Modells ist auch hier wieder eingeschränkt. Die Eindeutigkeit des Schnittpunktes kann durch eine Fixierung mittels einer Schraube und Mutter verdeutlicht werden.

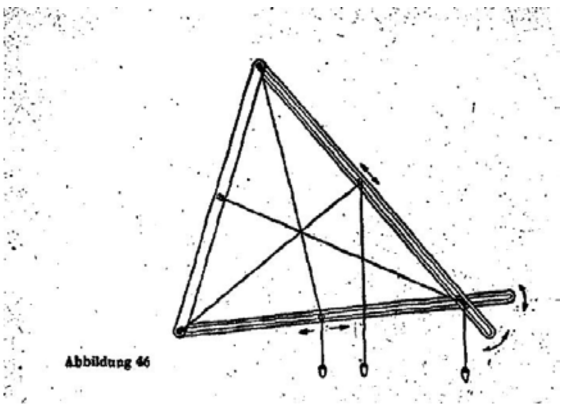
c) Schnittpunkt der Seitenhalbierenden:

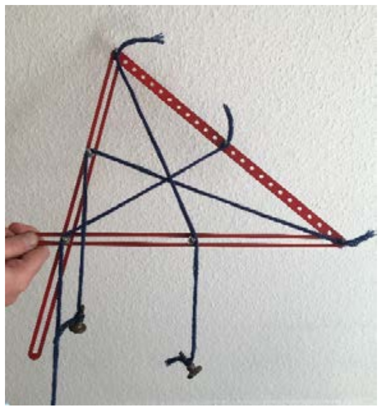
Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, dem Schwerpunkt S. Dieser teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1 vom Eckpunkt aus gesehen.

Umsetzung mit Geogebra:



Umsetzung mit dem Modellbaukasten:





Vor- und Nachteile des Modells:

Durch die Fäden ist das Modell sehr instabil und bereitet beim Bewegen Schwierigkeiten. Auch hier müssen die Mittelpunkte der Dreiecksseiten wieder ausgemessen werden, sonst könnte der Eindruck bei den SuS entstehen, dass sich die drei Strahlen aus den Eckpunkten immer in einem Punkt schneiden können.

Außerdem ist es durch die instabilen Fäden leider nicht möglich, den Schnittpunkt als Schwerpunkt des Dreiecks zu begreifen.

Es können an dem Modell aber noch andere Eigenschaften der Seitenhalbierenden entdeckt oder diskutiert werden.

Fazit:

Um sich die Schnittpunkte in einem Dreieck zu betrachten, ist es sinnvoller mit einer Mathematiksoftware zu arbeiten, da dort mehrere verschiedenen Dreiecke betrachtet werden können.

4.4 Gelenk-n-ecke

Definition:

Ein Gelenk-n-Eck besteht aus n Stangen (Seiten), die durch n Gelenke (Eckpunkte) miteinander zu einem Vieleck verbunden sind.

Umsetzung mit dem Modellbaukasten:

Nach der Einführung von Gelenk-n-Ecken, kann man die S.u.S viele verschiedenen Gelenk-n-Ecke bauen lassen und sie folgende Fragen beantworten lassen:

- Welche Stangenlängen habt ihr verwendet?
- Sind die Stangen zueinander beweglich?
- Für die beweglichen Vielecke: Fügt so lange Winkelplättchen oder Diagonalelemente hinzu, bis es starr ist.

Die Ergebnisse können in folgender Tabelle eingetragen werden:

Art des Gelenk-n-Ecks	**n**	**Beweglich?**	**Anzahl der ergänzten Teile**

Zusammenhang:

Gibt man einem Gelenk-n-Eck seine n Seitenlängen durch Stangen vor, so kann man noch n-3 Bestimmungsgrößen wählen, um es (bis auf Kongruenz) festzulegen.

Dies ist eine schöne Methode, den S.u.S. den **Freiheitsgrad** entdecken zu lassen.

Definition Freiheitsgrad:

Sei n größer gleich 3. Ein **Gelenk--Eck** ist ein -Eck, dessen Seiten starre Einzelteile und dessen Ecken Gelenke sind.

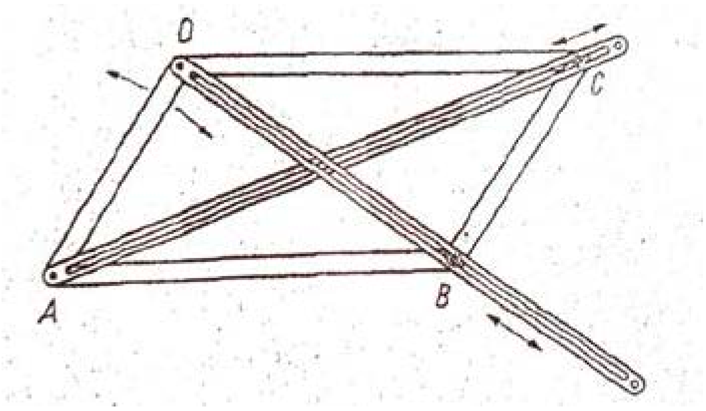
Die Anzahl von Teilen, die man mindestens ergänzen muss, bis sich die Seiten eines Gelenk-n-Ecks nicht mehr gegeneinander bewegen lassen, nennt man seinen **Freiheitsgrad**.

Der Freiheitsgrad eines Gelenk-n-Ecks ist n-3.

5. Vierecke (spezielle Trapeze, Parallelogramme, Rechtecke), Flächeninhalte (S. 76 – 92)

Gruppe 1: Eigenschaften des Parallelogramms entdecken

Baue ein Parallelogramm mit seinen Diagonalen wie auf der Abbildung beschrieben! Ergänze an drei beliebig gewählten Ecken jeweils einen Winkelmesser! Welche möglichen Eigenschaften des Parallelogramms kannst du entdecken? Nutze als Hilfsmittel ein Lineal!



Seiteneigenschaften:

- gegenüberliegende Seiten sind gleichlang und parallel

Winkeleigenschaften:

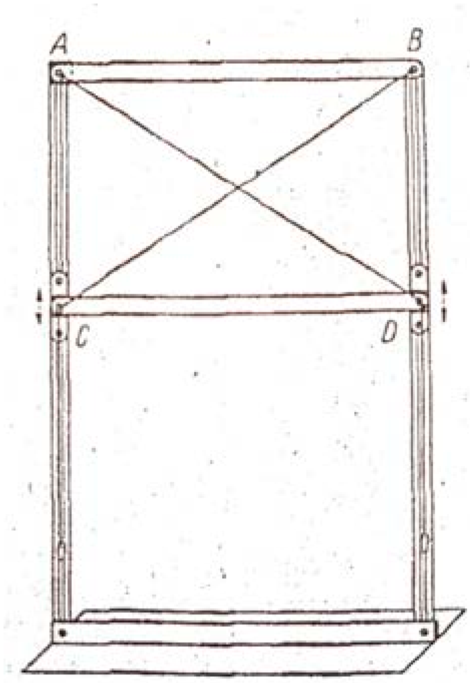
- gegenüberliegende Winkel sind gleichgroß
- Summe zweier benachbarter Winkel ist 180°

Diagonaleneigenschaften:

- Diagonalen halbieren einander
- jede Diagonale teilt Parallelogramm in 2 kongruente Dreiecke

Gruppe 2: Eigenschaften der Diagonalen im Rechteck und im Quadrat

Baue das abgebildete Modell und stelle Vermutungen zu den Eigenschaften der Diagonalen im Rechteck und im Quadrat auf! Nutze als Hilfsmittel ein Lineal und einen Winkelmesser!



Rechteck:

- Diagonalen sind gleichlang
- Diagonalen halbieren einander

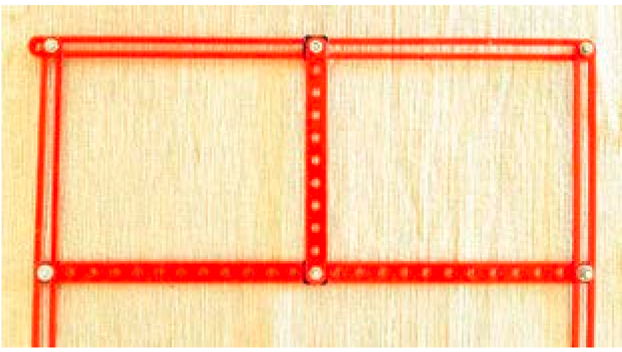
Quadrat:

- Diagonalen sind gleichlang
- Diagonalen halbieren einander
- Diagonalen stehen senkrecht aufeinander
- Diagonalen halbieren die Innenwinkel

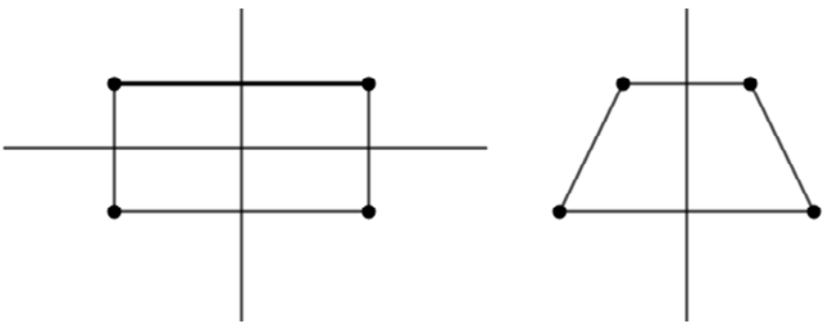
→ Quadrat als Sonderform des Rechtecks
(Beziehungen zwischen den Vierecken entdecken)

Gruppe 3: Beziehungen zwischen Vierecken entdecken – von Vierecken mit mindestens zwei Symmetrieachsen zu Vierecken mit nur einer Symmetrieachse

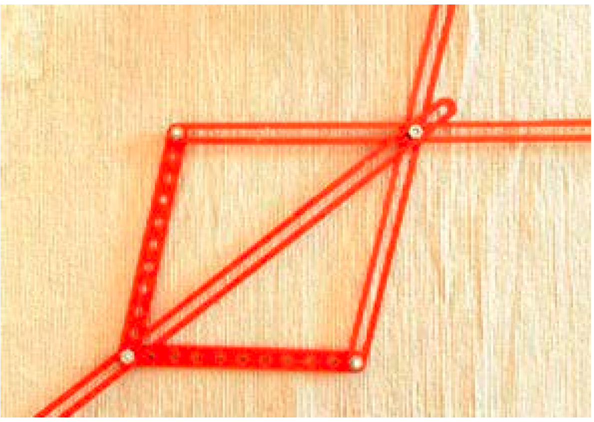
1) Baue ein Rechteck wie auf der Abbildung beschrieben! Lasse zwei benachbarte Eckpunkte senkrecht auf ihre Spiegelachse mit gleicher Geschwindigkeit zuwandern! Welches besondere Viereck erhältst du? Wo ist die Symmetrieachse?



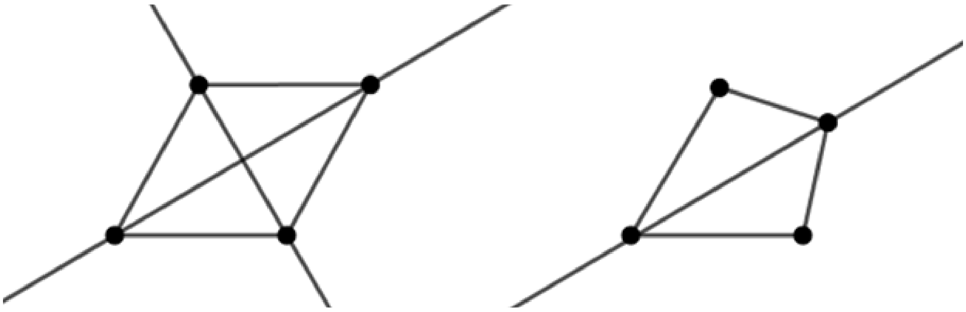
Vom Rechteck zum gleichschenkligen Trapez:



2) Baue eine Raute mit einer Diagonale wie auf der Abbildung beschrieben! Lasse den beweglichen Eckpunkt auf der Diagonale auf den gegenüberliegenden Eckpunkt zuwandern! Welches besondere Viereck erhältst du? Wo ist die Symmetrieachse?

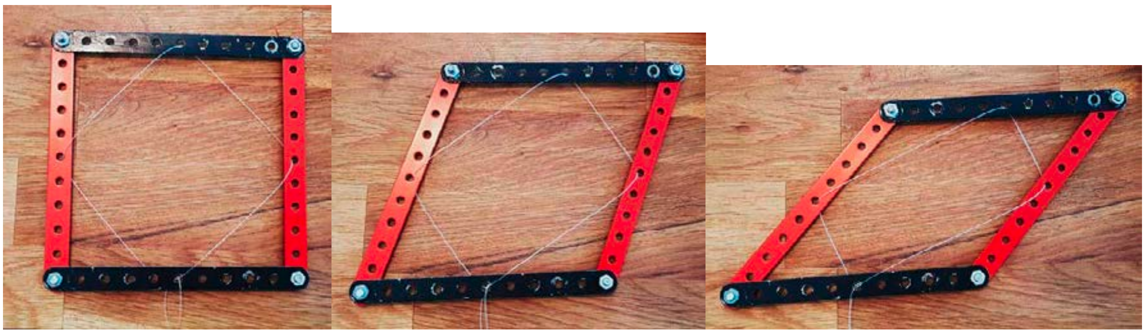


Von der Raute zum Drachenviereck:

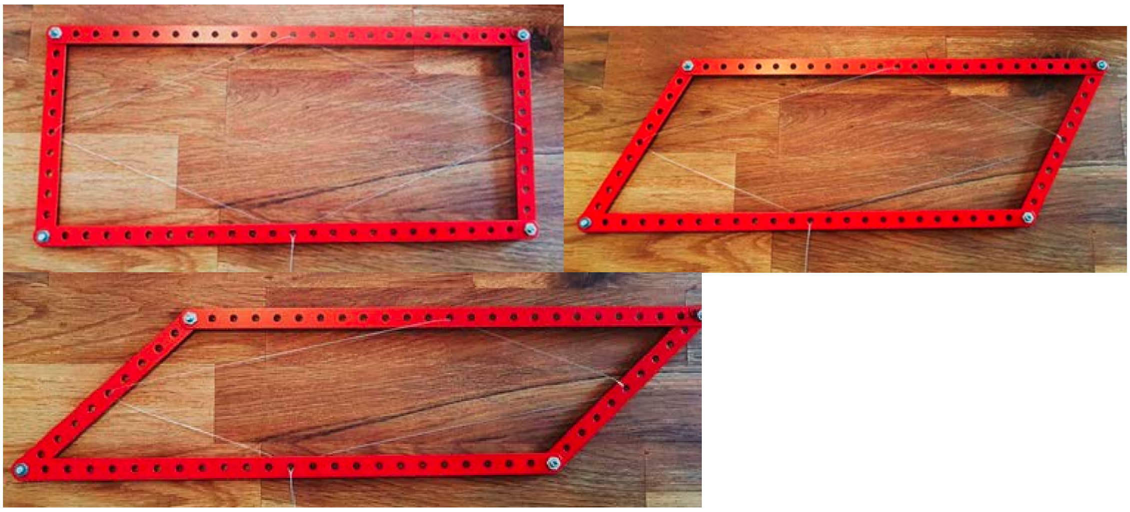


Gruppe 4: Vierecke in Vierecken entdecken

1) Baue ein Quadrat aus Flacheisen! Ziehe durch alle Seitenmitten eine Schnur, die die Seitenmitten miteinander verbindet! Welches besondere Viereck wird durch die Schnur dargestellt? Drücke nun dein Quadrat aus Flacheisen schief! Welche zwei besonderen Vierecke erhältst du?

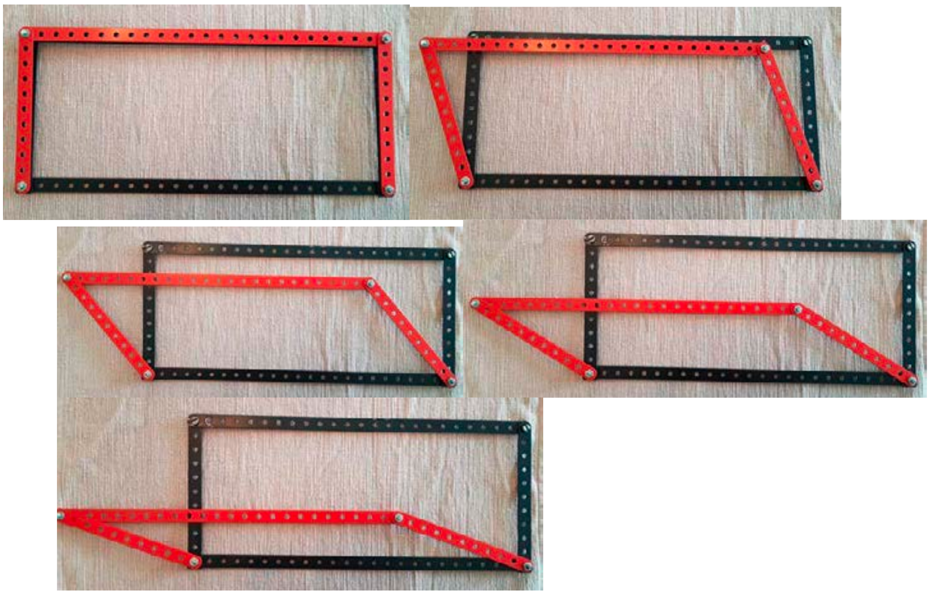


2) Baue ein Rechteck aus Flacheisen! Ziehe durch alle Seitenmitten eine Schnur, die die Seitenmitten miteinander verbindet! Welches besondere Viereck wird durch die Schnur dargestellt? Drücke nun dein Rechteck aus Flacheisen schief! Welche zwei besonderen Vierecke erhältst du?



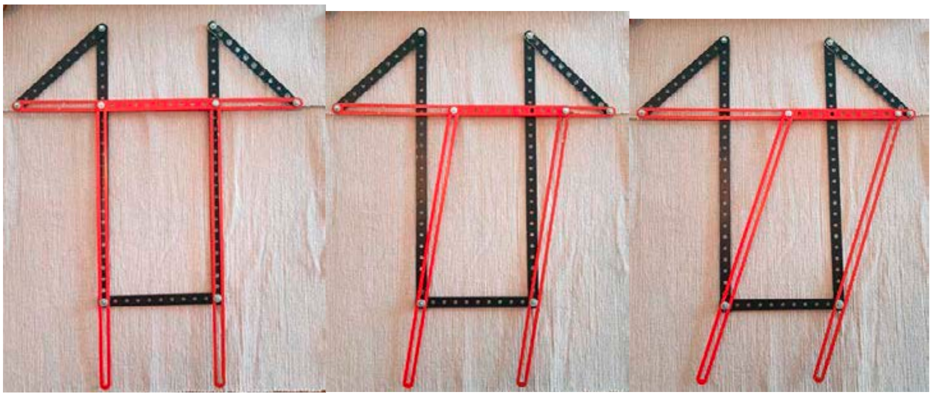
Flächeninhalt: Vergleich zwischen Rechteck und Parallelogramm:

- konstanter Umfang und variabler Flächeninhalt:

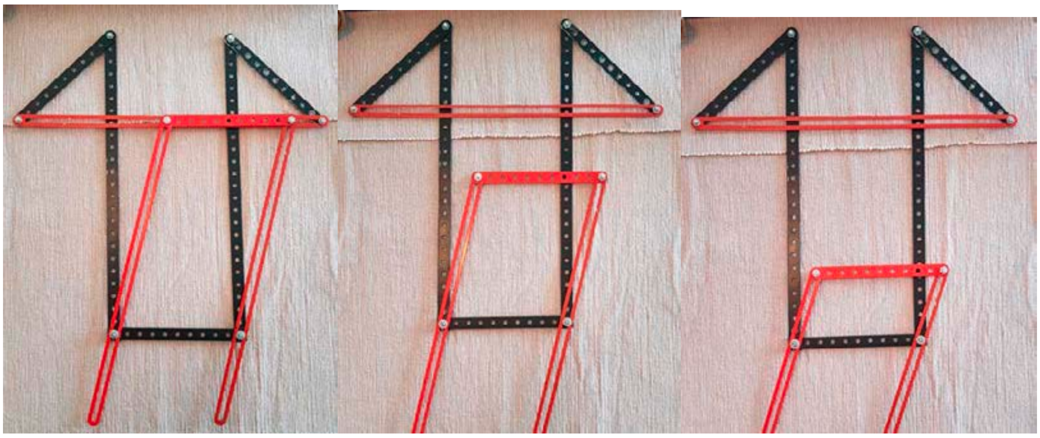


- konstanter Flächeninhalt und variabler Umfang:

kongruente Dreiecke → F=g•h



Abhängigkeit des Parallelogramminhalts von der Höhe bei konstanter Grundseite:

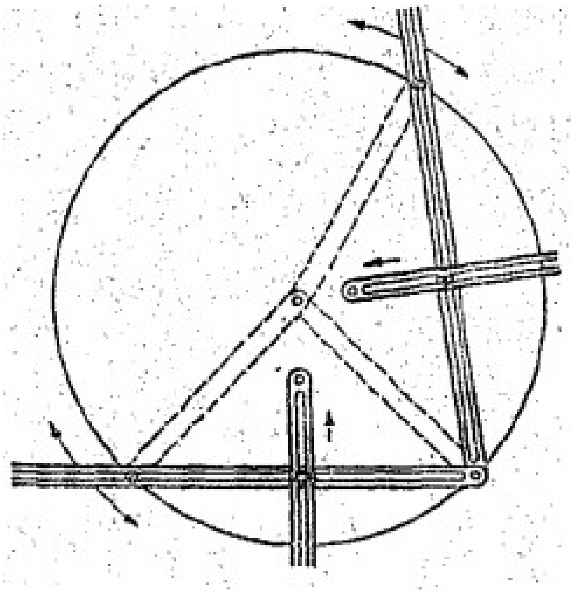


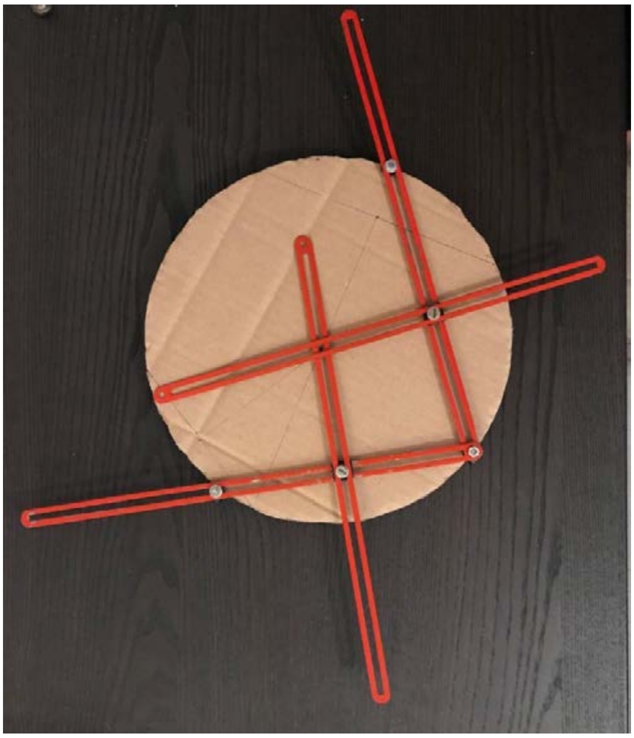
6. „Im Kreis herumführen“: Kreise, Sehnen, Umkreis, Tangenten, Peripherie- und Zentriwinkel, Thales, Pythagoras (S. 92 – 110)

Vorbereitung

- Zeichne mit Zirkel einen Kreis mit Radius 13cm sowie seinen Mittelpunkt.
- Schneide den Kreis möglichst sauber aus und stich ein Loch in denMittelpunkt.
- Damit alle Konstruktionen möglichst dynamisch bleiben, müssenalle Schrauben lose gedreht sein.

Senkrechten an Sehnen





Material:

- 1 Kreisscheibe 13 cm
- 3 geschlitzte Flacheisen
- 3 Lochstangen (11 Löcher)
- 4 Schiebestangen
- 2 rechte Winkelplättchen
- 10 Schrauben
- 10 Muttern
- ggf. Unterlegscheiben

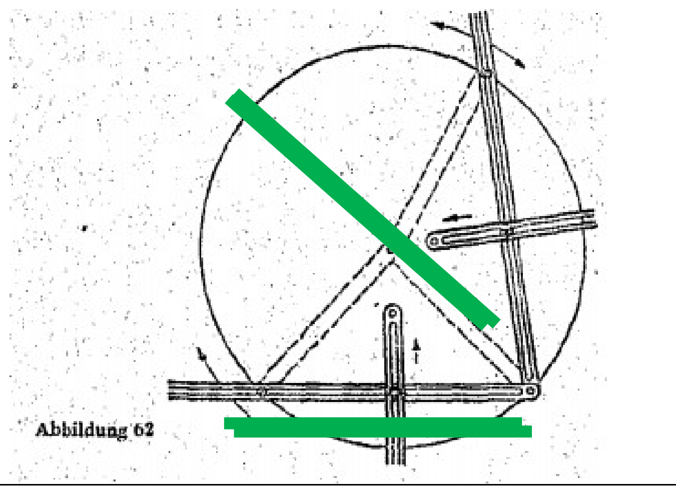
Erkenntnisse:

- Senkrechte auf einer Sehne geht nur dann durch den Mittelpunkt des Kreises, wenn sie Symmetrieachse ist (Mittelsenkrechte der Sehne).
- Ein Verfahren zur Bestimmung des Mittelpunktes.
- Ein Kreis ist durch 3 Punkte definiert, die nicht auf einer
- gemeinsamen Geraden liegen.

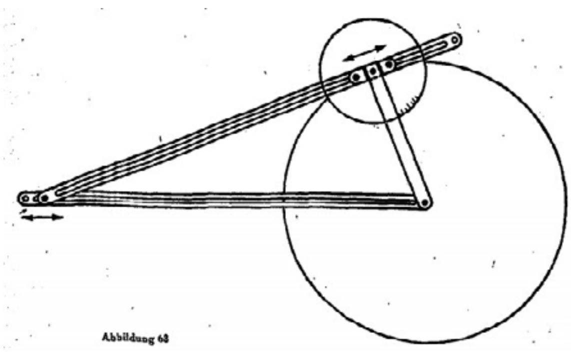
Erweiterung:

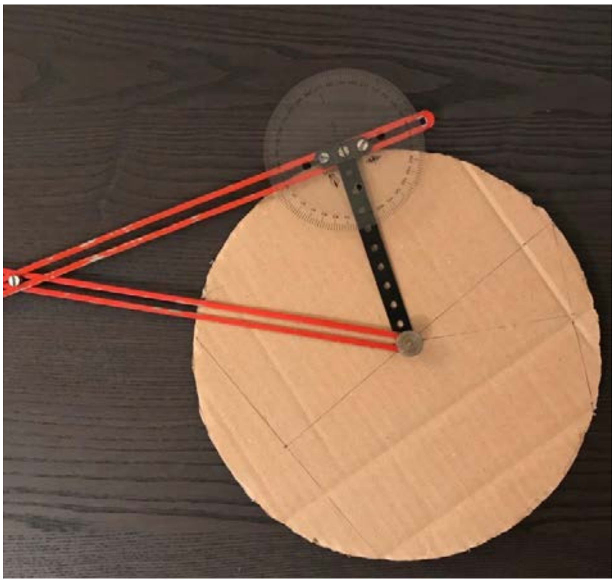
- Mit einer weiteren Sehne lässt sich der Umkreis eines Dreiecks, fixiert durch den Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten, motivieren.

Umkreis eines Dreiecks

	**Material:** Siehe „Senkechten an Sehnen“ + 1 Schiebestangen + 1 Lochstange + 1 rechtes Winkelplättchen + 1 Schraube + 1 Mutter **Erkenntnisse:** Der Schnittpunkt aller Mittelsenkrechten (S) ist der Mittelpunkt des zugehörigen Umkreises mit Radius R = SA = AB = SC.

Tangente am Kreis





Material:

- 1 Kreisscheibe 13 cm
- 1 geschlitzte Flacheisen
- 1 Lochstange (3 Löcher)
- 1 Lochstange (11 Löcher)
- 2 Schiebestangen
- 1 Winkelmesser
- 6 Schrauben
- 6 Muttern
- ggf. Unterlegscheiben

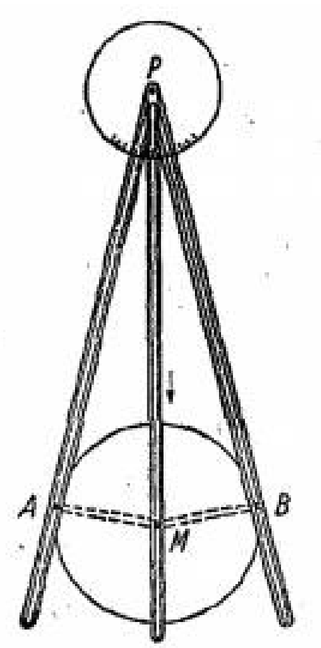
Erkenntnisse:

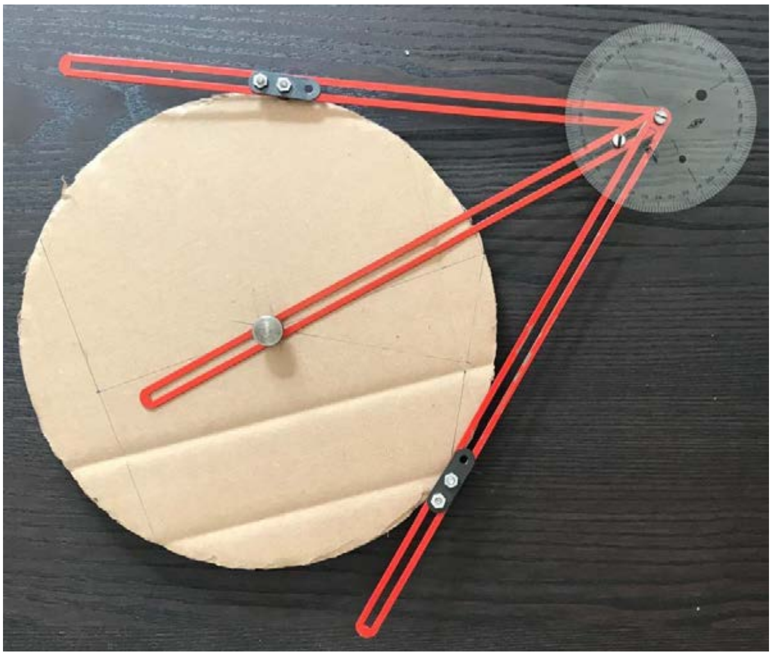
- Es existiert eine Grenzsekante (Tangente).
- Tangenten stehen senkrecht auf dem Radius und berühren den Kreis in genau einem Punkt.

Erweiterung:

- Konstruktion der zweiten Tangente auf Grundvon Symmetrie.

Tangenten am Kreis





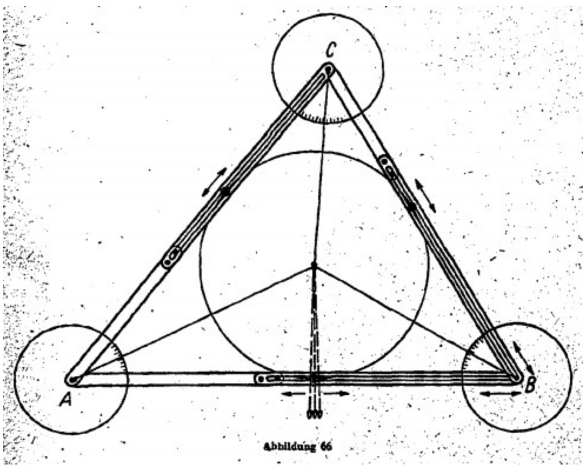
Material: Siehe *„Tangente am Kreis“*

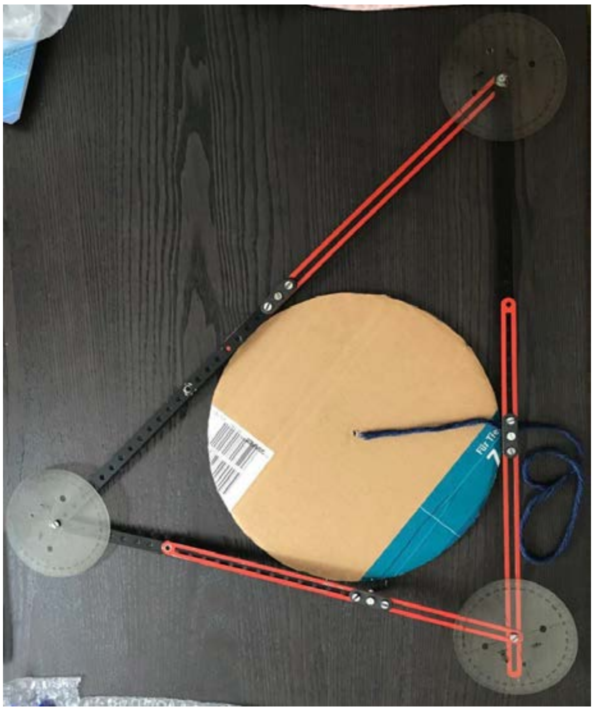
- + 1 Schiebestangen
- + 1 geschlitzte Flacheisen
- + 1 Lochstange (3 Löcher)
- + 1 Lochstange (11 Löcher)
- + 3 Schrauben
- + 3 Muttern

Erkenntnisse:

- Zu einem Punkt außerhalb des Kreises existieren immer zwei Tangenten.
- Die Bestimmungslinie für die Mittelpunkte aller Kreise, welche die Schenkel mit gleichem Abstand eines Winkels berühren, ist die Winkelhalbierende.

Inkreis eines Dreiecks





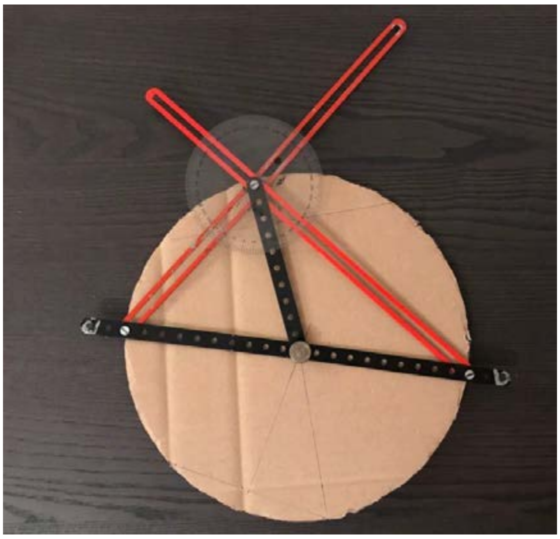
Material:

- 1 Kreisscheibe 13 cm
- Eine Schnur
- 3 Lochstangen (3 Löcher)
- 3 Lochstangen (25 Löcher)
- 3 Schiebestangen
- 3 Winkelmesser
- 12 Schrauben
- 12 Muttern
- ggf. Unterlegscheiben

Erkenntnisse:

- Der Mittelpunkt des Kreises hat zu allen Schenkeln denselben Abstand. Das ist aber gerade die Umkehrung aus „Tangenten am Kreis".
- Die Winkelhalbierenden der Innenwinkel eines Dreiecks schneiden sich im Mittelpunkt des Innenkreises.

Thales



Material:

- 1 Kreisscheibe 13 cm
- 1 geschlitzte Flacheisen
- 2 Lochstangen (11 Löcher)
- 1 Lochstange (25 Löcher)
- 2 Schiebestangen
- 1 Winkelmesser
- 1 rechtes Winkelplättchen
- 5 Schrauben
- 5 Muttern
- ggf. Unterlegscheiben

Erkenntnisse:

- Wenn ein Dreieck aus den Eckpunkten des Durchmessers eines (Thales-)Kreises und einem weiteren Punkt auf dem Kreisbogen gebildetwird, so ist der Winkel bei dem Punkt auf dem Kreisbogen ein rechterWinkel.

Erweiterung:

- Die Seite des Durchmessers wird zurbeliebigen Sehne.

Umfangswinkel (Peripheriewinkel)

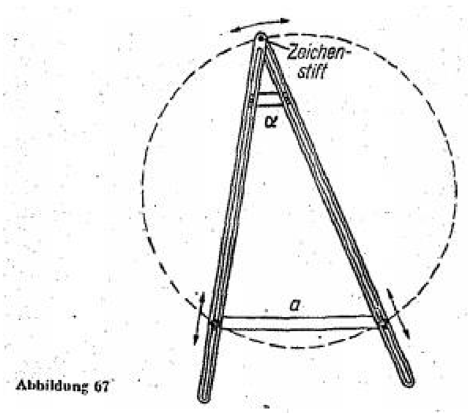


Abbildung 67

Material:

- 1 Kreisscheibe 13 cm
- 1 geschlitzte Flacheisen
- 3 Lochstangen (5 Löcher)
- 1 Lochstange (11 Löcher)
- 2 Schiebestangen
- 6 Schrauben
- 6 Muttern
- ggf. Unterlegscheiben

Erkenntnisse:

- Es handelt sich um ein Dreieck in einem Kreis, welches durch eine feste Sehne (11 Loch) und einen beweglichen Punkt C (oben) definiert ist.
- Dabei besagt der Umfangswinkelsatz, dass
- der Winkel am Punkt C immer gleich groß ist.

Erweiterung:

- Zentriwinkelsatz.

Zentriwinkel

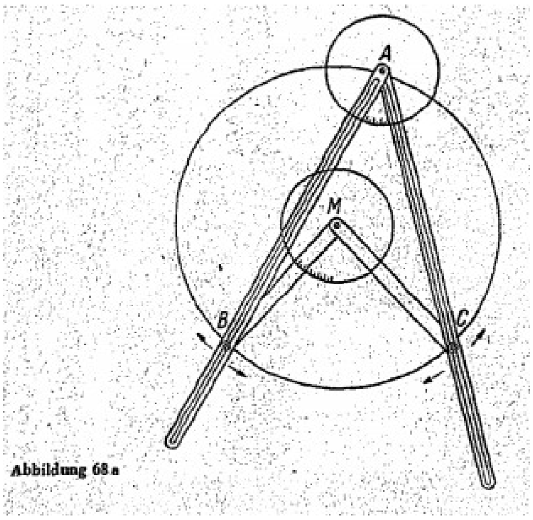
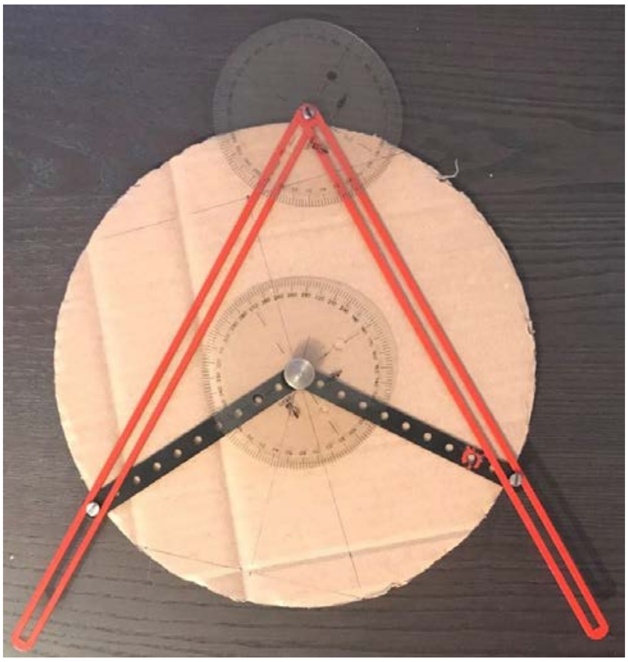


Abbildung 68 a



Material:

- 1 Kreisscheibe 13 cm
- 2 Lochstange (11 Löcher)
- 2 Schiebestangen
- 2 Winkelmesser
- 4 Schrauben
- 4 Muttern
- ggf. Unterlegscheiben

Erkenntnisse:

- Ein Zentriwinkel ist doppelt so groß, wie ein Peripheriewinkel über dem gleichen Bogen (gilt auch für stumpfe Peripheriewinkel).
- Alle Peripheriewinkel über dem gleichen Bogen sind
- gleich groß.

Sehnenviereck

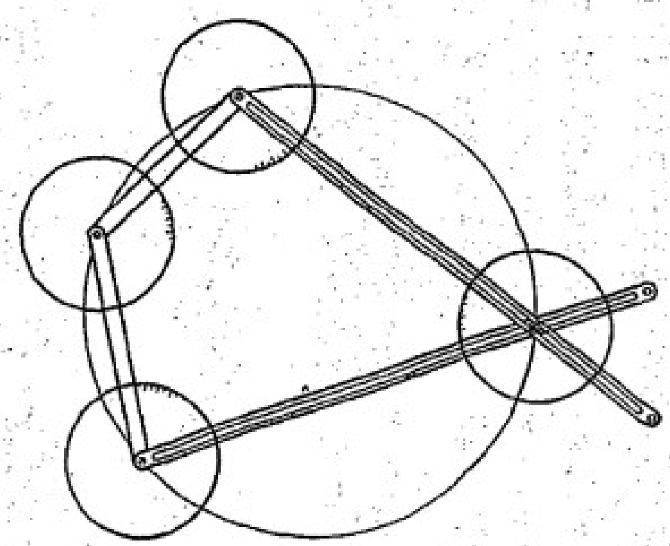
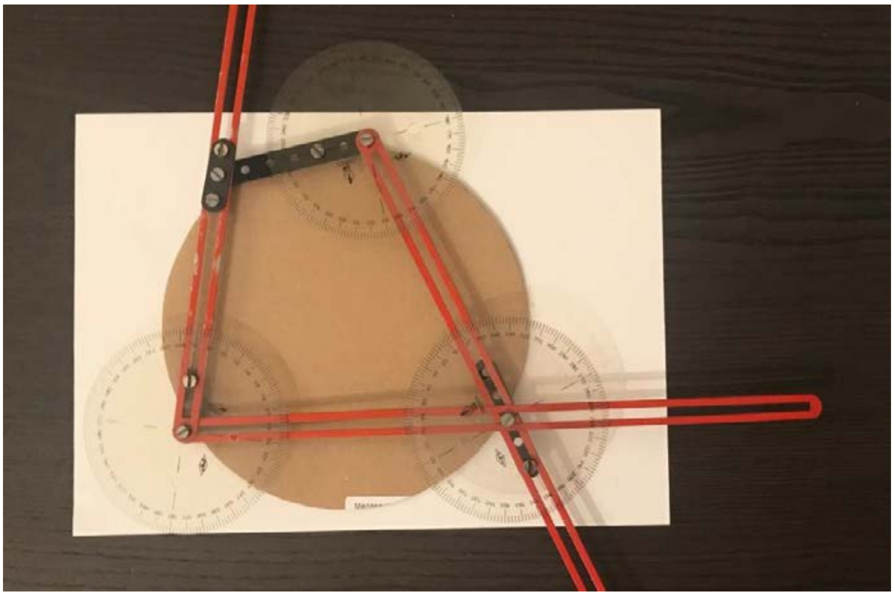


Abbildung 70

Material:

- 1 Kreisscheibe 13 cm
- 2 Lochstange (3 Löcher)
- 1 Lochstange (5 Löcher)
- 1 Lochstange (7 Löcher)
- 3 Schiebestangen
- 3 Winkelmesser
- 9 Schrauben
- 9 Muttern
- ggf. Unterlegscheiben



Erkenntnisse:

- Liegen alle Eckpunkte eines Vierecks aufdemselben Kreis, so addieren sich die gegenüberliegenden Winkel des Vierecks zu 180°.

7. Ähnlichkeit, Strahlensätze; Anwendungen: Storchenschnabel/Pantograph (S. 110 – 118)

Pantograph/Storchenschnabel - Metallbaukasten

- Bildet zwei Gruppen.
- Baut mit Hilfe des Bildes einen Pantographen mit dem Metallbaukasten.
- Vergrößert das Fünfeck!

Abbildung: Storchenschnabel

Pantograph/Storchenschnabel - Geogebra

- Aus zwei Gruppen werden vier!
- Erstellt ein Fünfeck in Geogebra.
- Vergrößert das Fünfeck um einen Faktor k! Fügt geeignete Hilfslinien ein!
- Was sind die Vor- und Nachteile?

Jacobsstab - Geogebra

- Öffnet den Link, den ihr per Mail geschickt bekommen habt.
- Folgt den Anweisungen in der Simulation 1 und 2.

Jacobsstab - Metallbaukasten

- Baut einen Jacobsstab mit dem Metallbaukasten.
- Viel Spaß beim Messen und Berechnen!

Abbildung: Jacobsstab gebaut mit dem Metallbaukasten

Abbildung: Höhen messen mit dem Jacobsstab

2. Strahlensatz (Filler, 1993): *Es seien p_1 und p_2 zwei Halbgera- den mit einem gemeinsamen Anfangspunkt O sowie A_1B_1 und A_2B_2 zwei parallele Geraden, welche die Strahlen p_1 in den Punkten A_1 und A_2 sowie p_2 in B_1 und B_2 schneiden. Dann gilt:*

$$\frac{|OA_1|}{|OA_2|} = \frac{|A_1B_1|}{|A_2B_2|}$$

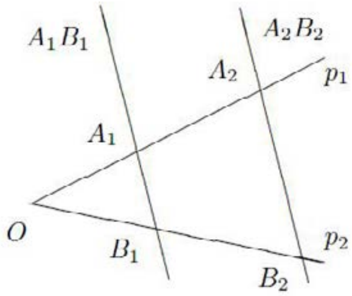


Abbildung: Strahlensatzfigur

Proportionslehre

- Bildet drei Gruppen.
- Baut die Proportionslehre auf dem Bild.
- Messt einige Objekte im Raum.
- Kurze gemeinsame Feedbackrunde.

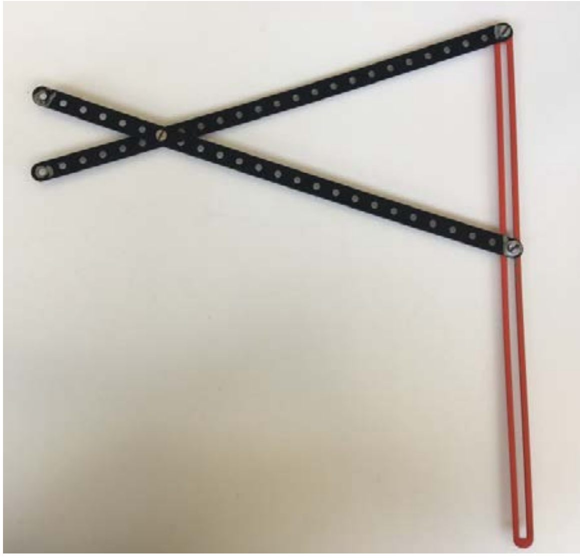


Abbildung: Proportionslehre

Strahlensätze am Modell

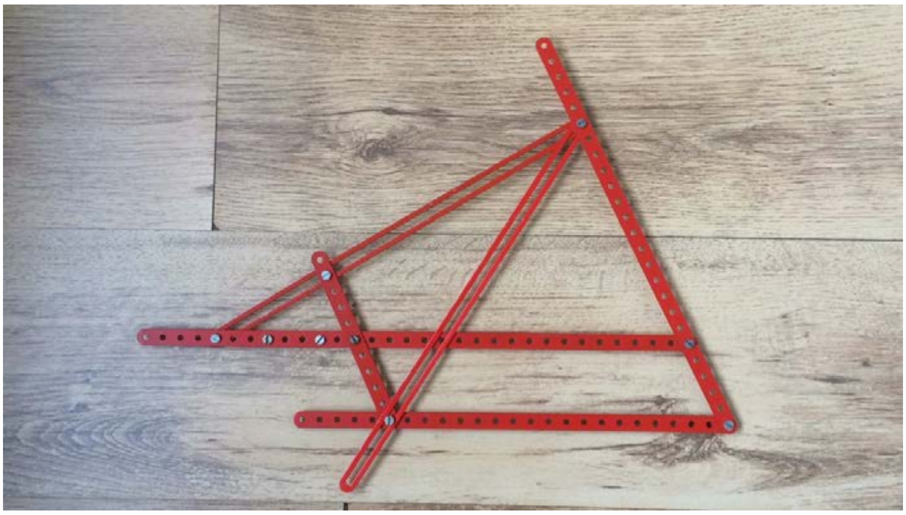
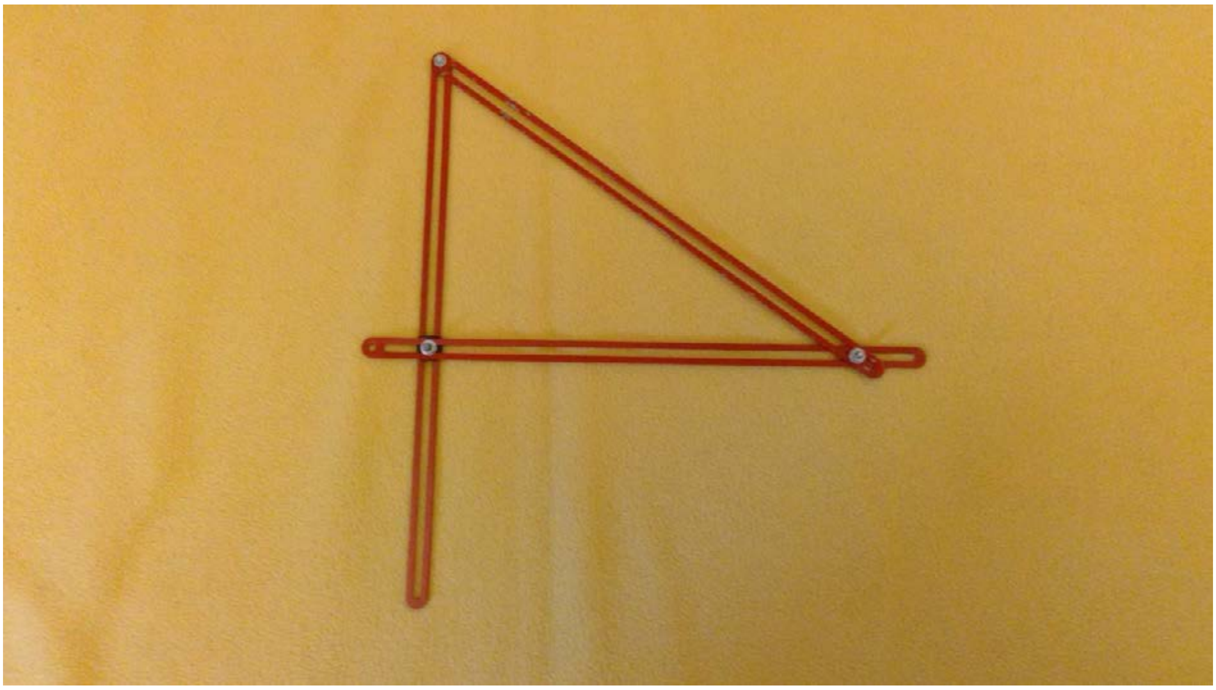


Abbildung: Strahlensatzfigur mit dem Metallbaukasten

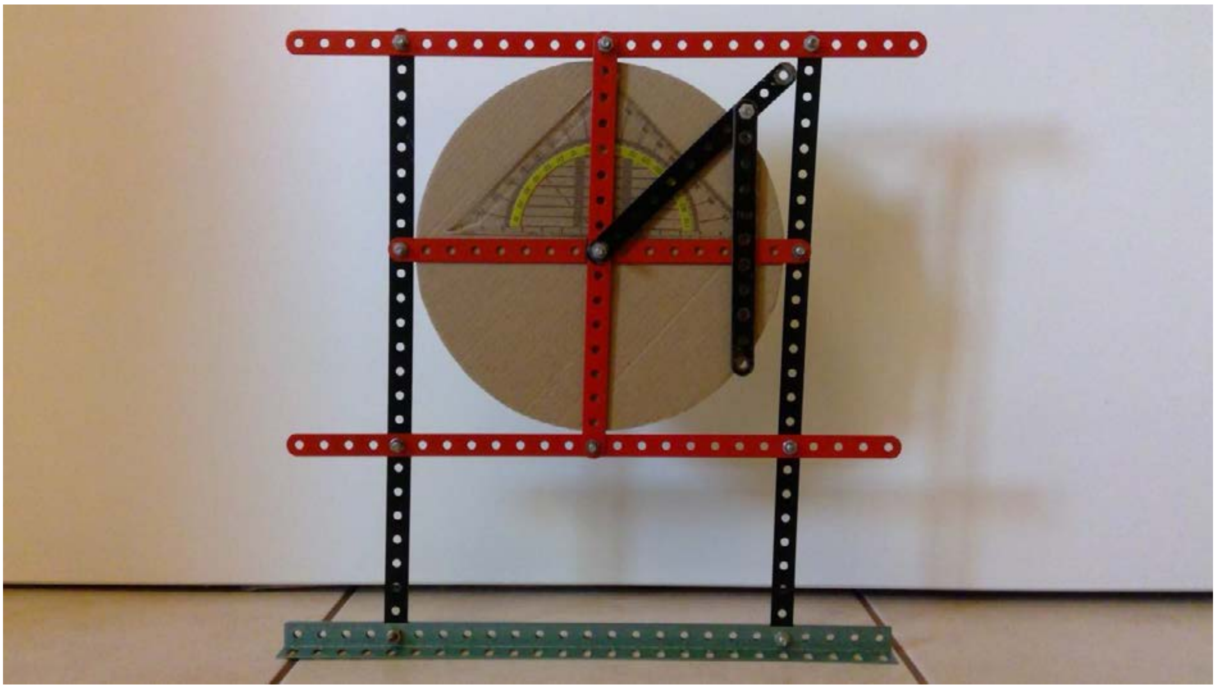
8. Trigonometrie, Ellipsen- und Parabelzeichner (S. 118 – 124)

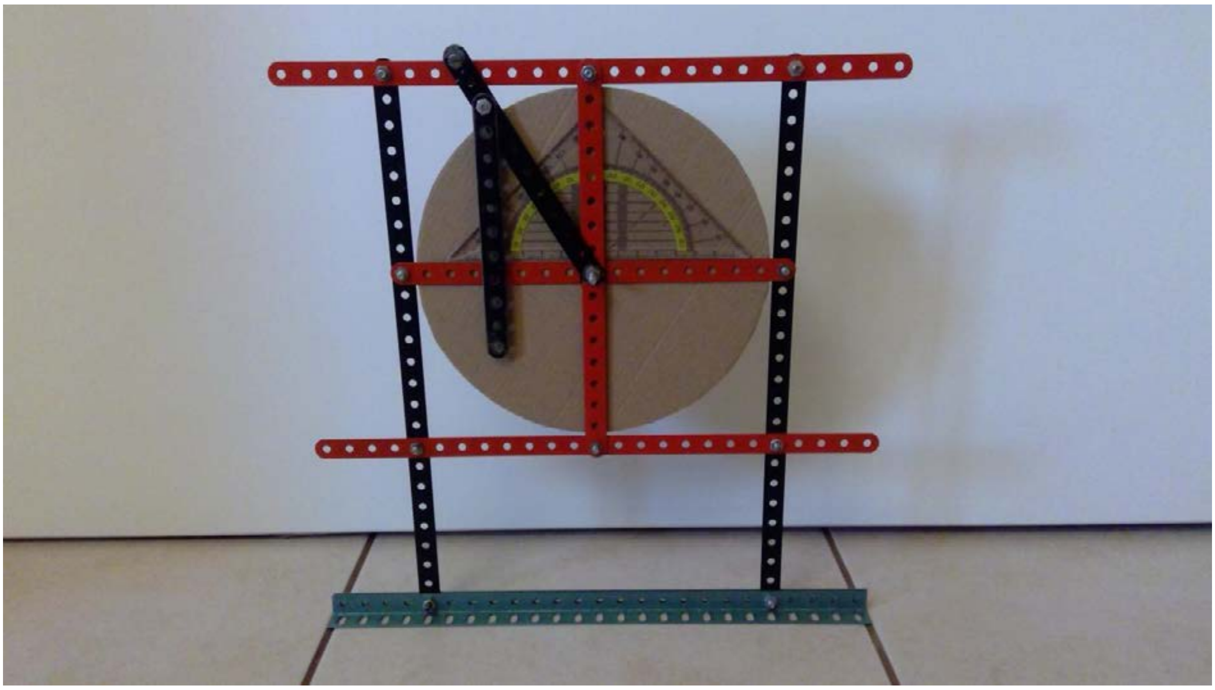
Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck



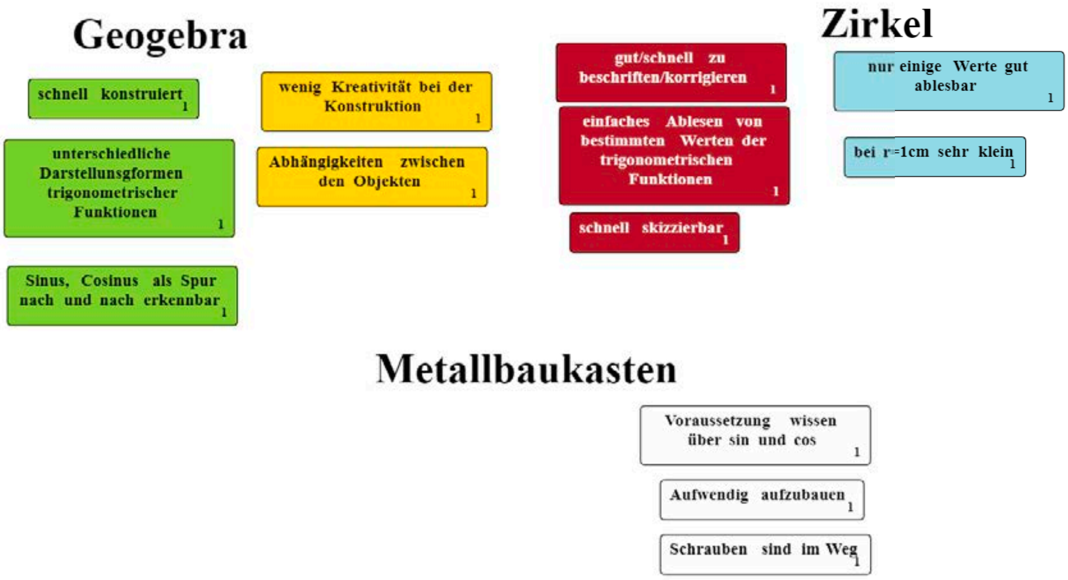
- Bau eines rechtwinkligen Dreiecks mit einer verschiebbaren Kathete, um das Gleichbleiben der Seitenverhältnisse bei konstanten Winkeln zu Entdecken

Trigonometrie am Einheitskreis





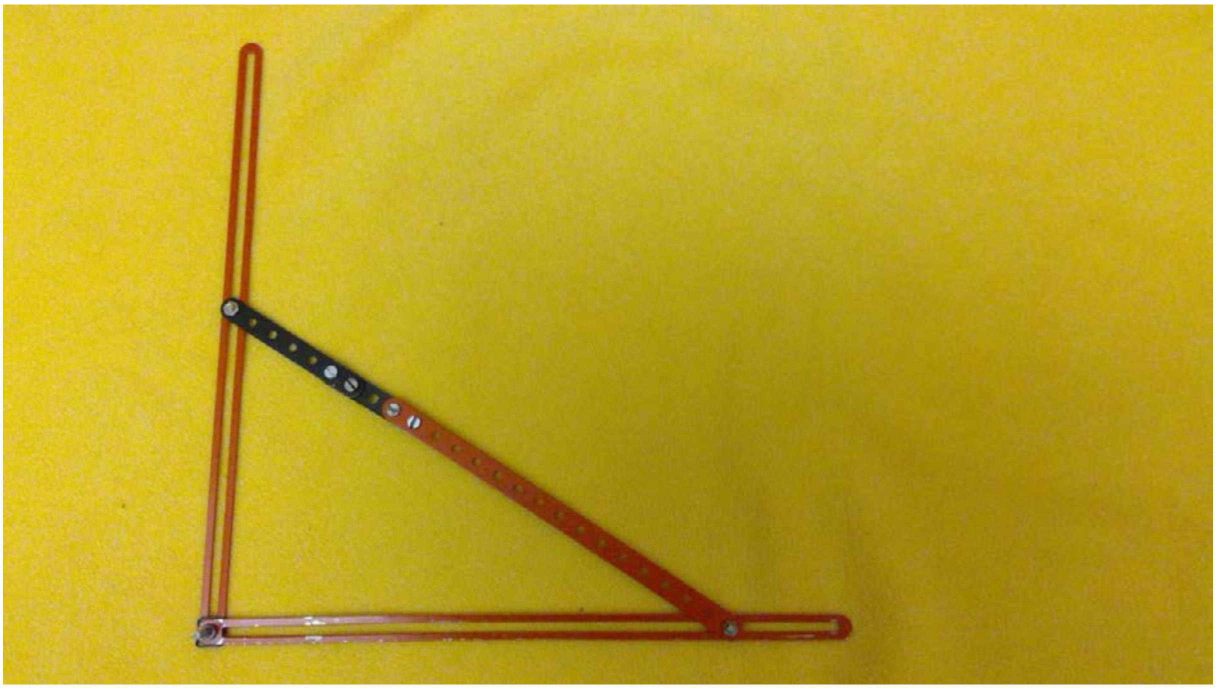
- Bau eines Modells des Einheitskreises



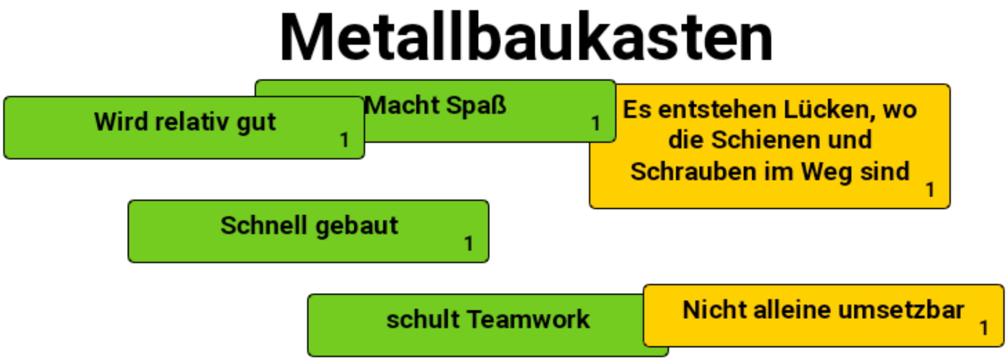
Vor- und Nachteile der verschiedenen Konstruktionsmedien

Im Vergleich mit des Konstruktionen mithilfe von Geogebra oder Zirkel und Lineal erscheint der Bau eines Einheitskreises mithilfe des Metallbaukastens umständlich und gewährleistet auch nicht das einfache Ablesen der Werte der Winkelfunktionen, das den Einheitskreis auszeichnet.

Zeichnen von Ellipsen

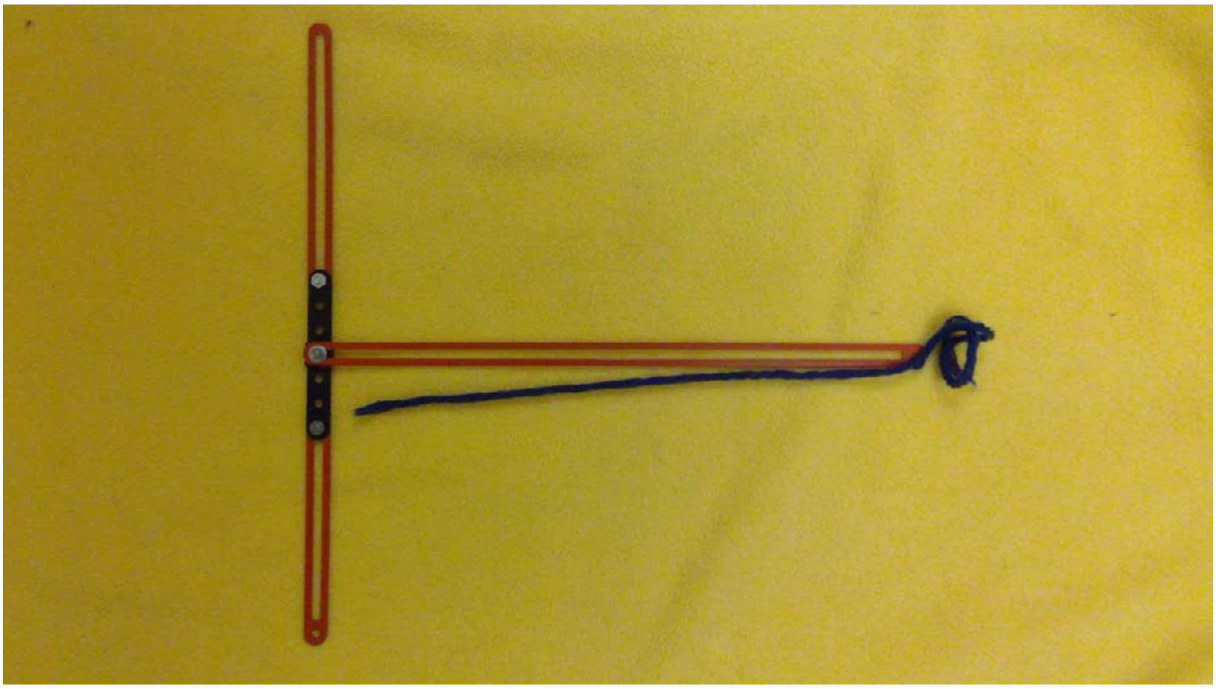


- Bau eines Ellipsenzeichners
  (Befestigung des Stiftes am Übergang von schwarzer zu roter Leiste)

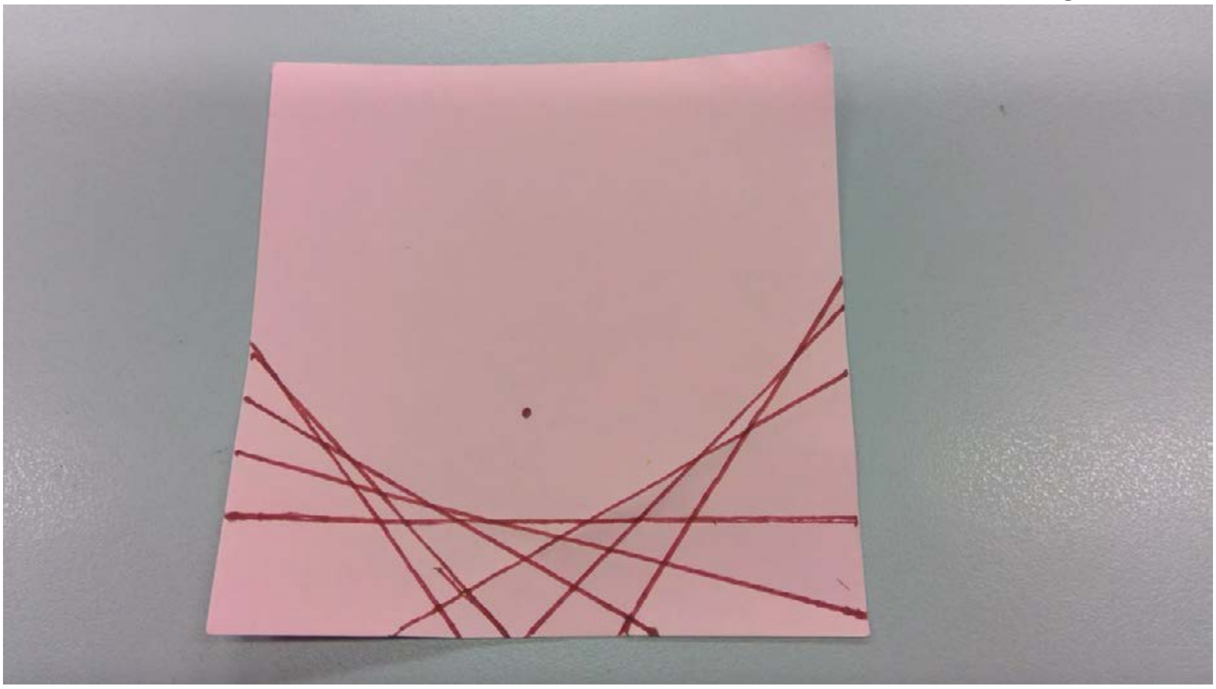


Hier zeigt sich der mit dem Metallbaukasten gebaute Ellipsenzeichner als sehr gut geeignet und insoweit der Konstruktion mit Geogebra und von Hand überlegen, als dass er zwar auf Eigenschaften von Ellipsen zurückgreift, diese aber für die ersten Zeichnungen noch nicht voll umfänglich bekannt sein müssen.

Parabeln und Hyperbeln

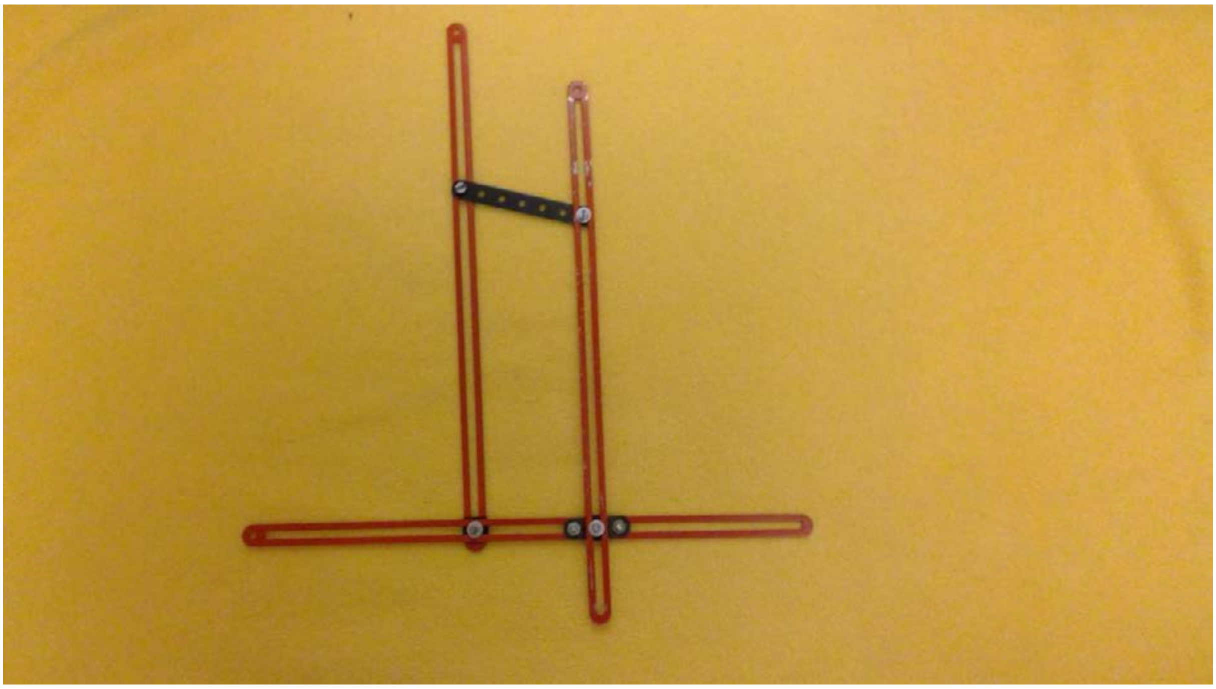


- Bau eines Parabelzeichners, der auf die Ortskurvendefinition der Parabel zurückgreift

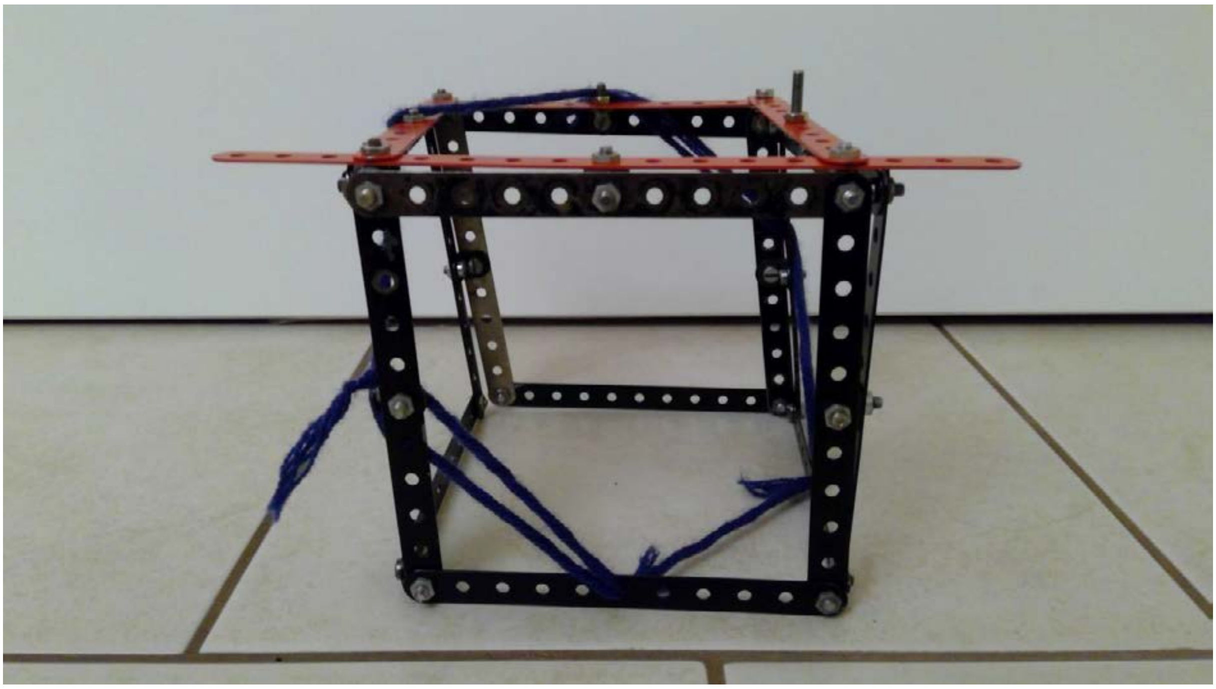


- Konstruktion einer Parabel entsprechend ihrer Definition als Ortskurve durch Papierfalten (Falzkanten liefern Tangenten an die Parabel)

Projektion von Strecken



Schnitte von Körpern und Ebenen



- Konstruktion eines regelmäßigen Sechsecks durch Verbinden der Mittelpunktevon sechs Kanten eines Würfels

9. Gesamtreflexion

Im Seminar wurde mehrfach anhand von Beispielen Vor- und Nachteile des Einsatzes „klassischer Medien“ (wie des betrachteten Metallbaukastens) für dynamische Aspekte der Geometrie – auch im Vergleich mit der Nutzung dynamischer Geometriesoftware (DGS) wie GeoGebra – diskutiert.

In der anschließenden Diskussion wurde hervorgehoben, dass der Einsatz des Metallbaukastens aus folgenden Gründen insbesondere als Einstieg sinnvoll ist:

- Haptik
- Förderung räumlichen Vorstellungsvermögens, auch bei ebenen Sachverhalten
- Vielfalt von Veranschaulichungsmitteln (Computer allein nicht ausreichend)
- Modellhaftigkeit: Bezüge zur physischen Realität liegen näher
- motivierend (insbesondere für jüngere Schülerinnen und Schüler, für ältere aber wahrscheinlich auch)
- gut für kooperatives Arbeiten geeignet

Allerdings sind – stark abhängig von der jeweiligen Konstruktion – auch klare Nachteile des Metallbaukastens gegenüber der Software festzustellen:

- Konstruktionen sind mithilfe des Metallbaukastens z. T. komplizierter zu realisieren als Computerkonstruktionen.
- Oft ist der Zeitbedarf höher.
- Größere/komplexere Konstruktionen sind z. T. unübersichtlich sowie unhandlich und/oder instabil.
- Die Konstruktionen sind ungenauer, skizzenhafter; dieser Nachteil fällt vor allem ins Gewicht, wenn Messungen durchgeführt werden sollen.
- Die Beweglichkeit von Konstruktionen ist z. T. durch Schrauben eingeschränkt.

Allerdings haben der höhere Zeitbedarf und die teilweise schwierigere Realisierung von Konstruktionen auch den Vorteil, dass Zusammenhänge und Eigenschaften häufiger benötigt werden als bei Computerkonstruktionen.

- Auch für/gegen den Computereinsatz sprechen Vor- und Nachteile:
- Konstruktionen sind präzise und oft schnell realisierbar.
- Sofortiges Feedback wirkt sich allerdings auch negativ auf die Motivation aus.
- Geometriesoftware als „Black Box“: Man sieht nicht, was im Hintergrund passiert.
- Abhängigkeitsverhältnisse (was ist fix, was variabel, was wovon abhängig) sind bei DGS oft unübersichtlicher, während man bei Metallbaukasten-Konstruktionen unmittelbarer sieht, welche Schrauben in festen Löchern stecken und welche verschiebbar sind.

Wie schwer Vor- und Nachteile wiegen, hängt stark von den jeweiligen Konstruktionen ab.

Für Metallbaukasten gut geeignete Beispiele

- Körpernetze
- variable Dreiecke
- Vierecke, insbesondere Gelenkvierecke
- Thales- und Umfangswinkelsatz
- Elementare Erfahrungen mit Kongruenzsätzen (mit dem Ziel der Stabilität) bzw. allgemeiner: Freiheitsgrade
- Jakobsstab als Anwendung der Strahlensätze
- Ellipsenkonstruktion

Für Metallbaukasten eher schlecht geeignete Beispiele

- Strahlensatzkonstruktion nach Bellin, einfachere Konstruktion sinnvoller, aber Messungen schwierig
- Reflexionsgesetz
- Darstellung Kongruenzsätze
- Kreiskonstruktionen

Vorschlag für die künftige Gestaltung vergleichbarer Seminare:

Ausarbeitung von Unterrichtsstunden oder Projekttagen mit konkreter Zeitplanung