Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
A. Filler Sommersemester 2020

Zusammenfassende Notizen zu der Vorlesung

Didaktik der Algebra und Zahlentheorie

1 Behandlung der natürlichen Zahlen; Zahlaspekte

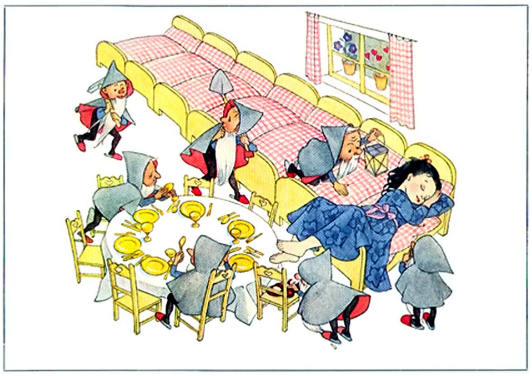
Literatur: Das Standardwerk zur Didaktik der Arithmetik ist:

PADBERG, F.; BENZ, CHR.: *Didaktik der Arithmetik*. Heidelberg: Spektrum, 2011 (4. Aufl.).

1.1 Zahlaspekte

1.1.1 Kardinaler Zahlaspekt

Die Zahl „7“ erhält in dem Märchen „Schneewittchen und die sieben Zwerge“ ihre Bedeutung durch bijektive Zuordnungen.

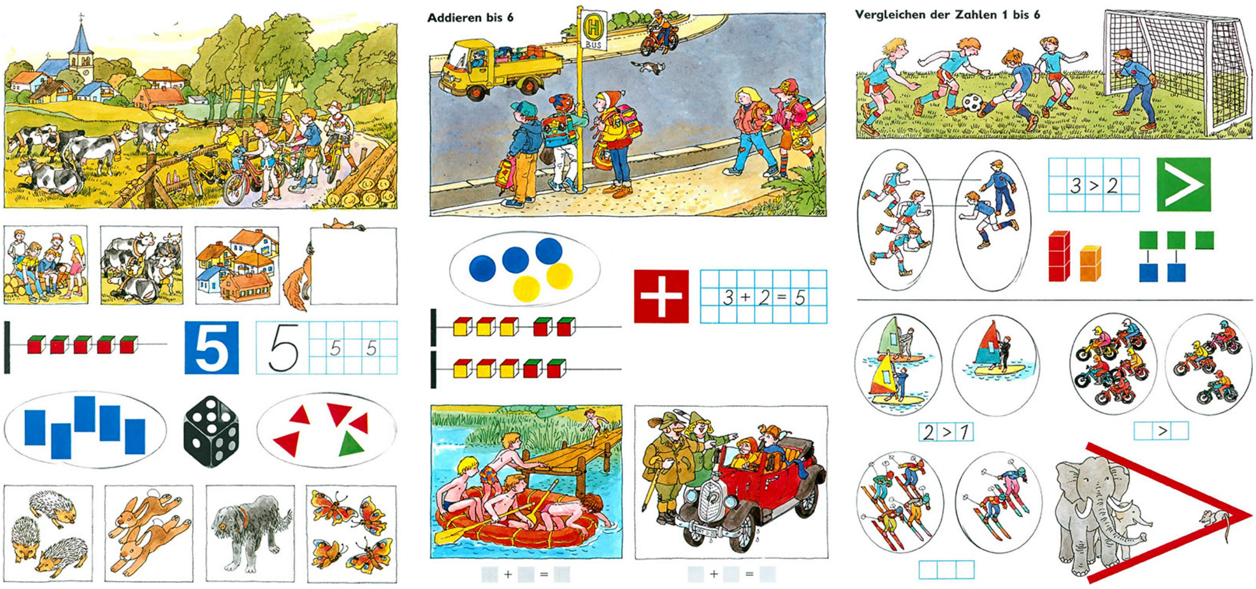


Genetisch-mengentheoretische Einführung der natürlichen Zahlen als Kardinalzahlen

- *Bijektion*: Injektive und surjektive Abbildung, d. h. *eineindeutige* Abbildung *von* einer Menge M_1 *auf* eine Menge M_2.
- *Gleichmächtigkeit*: Zwei Mengen M_1 und M_2 heißen gleichmächtig ($M_1 \sim M_2$), falls eine bijektive Abbildung ϕ existiert, die M_1 auf M_2 abbildet.

  Die Gleichmächtigkeit ist eine *Äquivalenzrelation*, sie zerlegt eine Menge (von Mengen) daher in Äquivalenzklassen.
- *Kardinalzahl:* Äquivalenzklasse $\text{card}(M)$ bzgl. der Gleichmächtigkeit einer Menge M:
  $$\text{card}(M) := \left\{ X : X \in E^{(1)} \wedge X \sim M \right\}$$
  ($E^{(1)}$ ist die Menge aller Teilmengen des Grundbereiches.)

Die Menge aller Kardinalzahlen endlicher Mengen heißt *Menge der natürlichen Zahlen*.



Natürliche Zahlen als Kardinalzahlen in einem Schulbuch der Klasse 1

1.1.2 Ordinaler Zahlaspekt

Genetisch-mengentheoretische Einführung der natürlichen Zahlen als Ordinalzahlen

- *Wohlordnung*: Relation R in einer Menge M mit folgenden Eigenschaften:
  - R ist reflexiv, transitiv und antisymmetrisch (analog „$\leq$“).
  - In allen nichtleeren Teilmengen N von M existiert ein kleinstes Element bzgl. R (ein Element p mit pRx für alle Elemente x der Menge N).
- *Ähnlichkeit zweier Mengen*: Zwei wohlgeordnete Mengen (M_1, R) und (M_2, S) heißen ähnlich ($M_1 \approx M_2$), falls eine eineindeutige Abbildung $\phi : M_1 \to M_2$ existiert mit:
  $$\text{f. a. } x, y \in M_1 \text{ gilt: } x\,R\,y \Leftrightarrow \phi(x)\ S\ \phi(y).$$
  Auch die Ähnlichkeit von Mengen ist eine Äquivalenzrelation.
- *Ordinalzahl*: Äquivalenzklasse $\operatorname{ord}(M)$ bzgl. der Ähnlichkeit einer Menge M:
  $$\operatorname{ord}(M) := \left\{ X : X \in E^{(1)} \wedge X \approx M \right\}$$

Peano-Axiome

Auch die Einführung der natürlichen Zahlen mittels der ***Peano-Axiome*** korrespondiert mit dem ordinalen Zahlaspekt.

(1) Die Zahl Eins (Null) ist eine natürliche Zahl.

(2) Jede natürliche Zahl besitzt eine eindeutig bestimmte natürliche Zahl als unmittelbaren Nachfolger.

(3) Jede natürliche Zahl ist unmittelbarer Nachfolger höchstens einer natürlichen Zahl.

(4) Die Zahl Eins (Null) ist kein unmittelbarer Nachfolger einer natürlichen Zahl.

(5) Die Menge aller natürlichen Zahlen ist die bezüglich Inklusion kleinste Menge, welche die Zahl Eins (Null) und mit jeder Zahl auch deren unmittelbaren Nachfolger enthält.

1.1.3 Zusammenhang von Ordinal- und Kardinalzahlen (nach PIAGET)

> *„Eine Kardinalzahl ist eine Klasse, deren Elemente aufgefasst werden als untereinander äquivalente und dennoch unterschiedliche 'Einheiten', deren Differenzen also nur darin bestehen, dass man sie aufreihen, also anordnen kann.*
>
> *Umgekehrt sind die Ordinalzahlen eine Reihe, deren Glieder, obgleich sie aufeinanderfolgen nach den Ordnungsrelationen, die ihnen ihre jeweiligen Rangstufen zuweisen, ebenfalls Einheiten sind, die einander äquivalent sind und infolgedessen kardinal zusammengefügt werden können.*
>
> *Die finiten Zahlen sind also zwangsläufig zugleich Kardinal- wie Ordinalzahlen; das ergibt sich aus der Natur der Zahl selbst, die ein in ein einziges operatorisches Ganzes verschmolzenes System von Klassen und asymmetrischen Relationen ist.“*

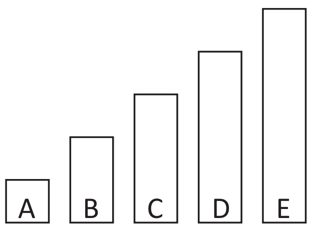
Versuch: Kindern werden 10 Pappstreifen gleicher Breite (1 Einheit) vorgelegt, die Länge von B beträgt 2, die von C 3 Einheiten usw.

1. Aufgabe: Ordnen und Zählen der Streifen.

2. Aufgabe: Wie viele A könnte man aus B und C herstellen?

3. Aufgabe: Es wird auf einen beliebigen Streifen gezeigt und gefragt, wieviele A daraus hergestellt werden könnten.

(Schluss von Ordination auf Kardination.)



... insg. 10 Streifen

1.1.4 Weitere Zahlaspekte

(nach MAIER, RADDATZ/SCHIPPER, LAUTER, PADBERG)

- Kardinaler Zahlaspekt (Mächtigkeit von Mengen)
- Ordinaler Zahlaspekt (Zählzahlen, Ordnungszahlen)
- Operatoraspekt („Wieviel mal...?"), Maßzahlaspekt
- Rechenaspekt, algebraischer Zahlaspekt
- Codierungsaspekt (Zahlen zur Bezeichnung von Objekten)

Bemerkungen:

- Operatoraspekt und Maßzahlaspekt werden z. T. als getrennte Aspekte gefasst.
- Für die mathematische Begründung der natürlichen Zahlen sind der kardinale und der ordinale Zahlaspekt von größter Bedeutung.

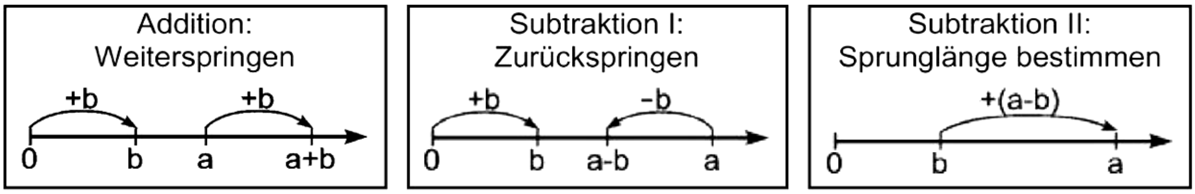
1.2 Von Aspekten zu Grundvorstellungen

Kardinal-, Ordinal- und Maßzahlaspekt konstituieren entscheidende Aspekte der natürlichen Zahlen. Sie geben einen Fingerzeig, wie sich anschauliche Grundvorstellungen zu den natürlichen Zahlen erzeugen lassen.

- Operieren mit Mengen
- Operieren am Perlenkettenmodell
- Operieren mit Maßzahlen

Anschauliche Vorstellung der Addition in den Modellen?

„Einmal als Vereinigung zweier Mengen,
einmal als Vorwärtsschreiten auf dem Zahlenstrahl"



abstrakt-symbolische Grundvorstellungen der Addition und Subtraktion (nach Baireuther 2005)

1.2.1 Warum Grundvorstellungen?

Grundvorstellungen als Grundlage für

- Sinnkonstituierung durch Anknüpfung an bekannte Sachzusammenhänge oder Begriffe
- operativen Umgang mit math. Denkgegenständen
- Anwendbarkeit math. Wissens auf die Wirklichkeit
- v. Hofe, Fischbein u.a.: Vernachlässigung der Ausbildung von Grundvorstellungen kann zu systematischen Fehlstrategien führen, zu unreflektierter bzw. formaler Anwendung mathematischer Verfahren
- Gerster/Schulz (1998): Eingeschränkte Zahl- und Operationsvorstellungen sind wesentliche Gründe für Rechenschwäche

1.2.2 Operatives Prinzip/ Operative Prinzipien

Objekte erfassen bedeutet, zu erforschen,[1]

[1]Siehe WITTMANN, E. CH.: Objekte – Operationen – Wirkungen: Das operative Prinzip in der Mathematikdidaktik. mathematik lehren 11, 1985, S. 7-11. Zu operativen Prinzipien siehe auch ausführlicher die Vorlesung „Einführung in die Mathematikdidaktik und Didaktik der Geometrie".

- wie sie konstruiert sind,
- wie sie sich verhalten, wenn auf sie Operationen ausgeübt werden.

Im Erkenntnisprozess wird systematisch untersucht,

- welche Operationen ausführbar und wie sie verknüpft sind,
- welche Eigenschaften und Beziehungen den Objekten durch Konstruktion aufgeprägt sind,
- welche Wirkungen Operationen auf Eigenschaften und Beziehungen der Objekte haben.

Anschauer und Zähler[2]

Anschauer:

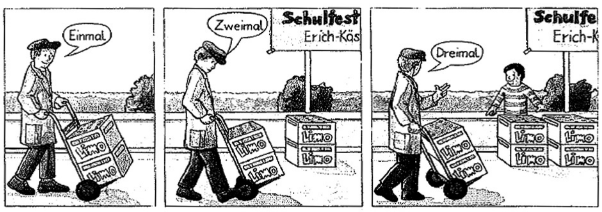
- Betonung des kardinalen Zahlaspektes
- Zahlen bis 4 bzw. 5 können simultan erfasst werden
- Räumlich-simultane Zahldarstellung auch größerer Zahlen (mit simultan erfassbaren Vierer- und Fünfergruppen) sind wichtigste Veranschaulichungsmittel
- Einsatz von flächig angeordneten Zahlenbildern
- Betonung des Zahl- und Rechenmaterials als Grundlage der Anschauung
- Betonung der statischen Aspekte von Addition und Subtraktion (Hier sind x, dort sind y Objekte. Wie viele sind es zusammen/wie groß ist der Unterschied?)

Zähler:

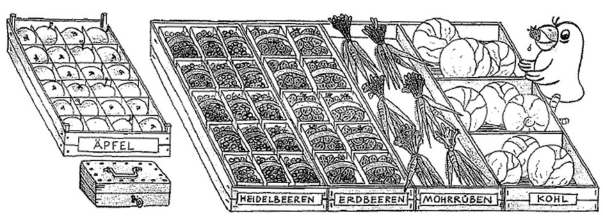
- Betonung des ordinalen Zahlaspektes
- Es gibt keine simultane Zahlauffassung. Die schnelle Angabe der Zahleigenschaft beruht auf einem schnellen Auszählen der Objekte.
- Zahlen, welcher Größe auch immer – können nur zeitlich sukzessiv aufgefasst werden
- Einsatz von linearen Zählmaterialien
- Betonung des Zähl- und Rechenvorganges
- Betonung der dynamischen Aspekte von Addition und Subtraktion (Du hast x Objekte und bekommst y dazu/ gibst y ab. Wie viel hast du?)
- Bevorzugt die akustischen und motorischen Typen im Unterricht

1.2.3 Multiplikation natürlicher Zahlen – zwei Sichtweisen

zeitlich-sukzessive Handlungen[3]



räumlich-simultane Anordnungen



[2]Nach RADATZ/SCHIPPER: Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen. Hannover: Schroedel, 1983.

[3]Nach PADBERG/BENZ: *Didaktik der Arithmetik*. Heidelberg: Spektrum, 2011 (4. Aufl.).

1.3 Fazit

Fazit I: Didaktische Leitlinien dieser Vorlesung

- Mathematische Begriffsbildung konstituiert sich oft aus mehreren tragenden fachlichen Aspekten $\rightsquigarrow$ identifizieren!
- Auf der Grundlage gezielt angelegter, reichhaltiger Begriffsvorstellungen, die sich aus diesen Aspekten speist, lässt sich gut arbeiten!

  Das wahre Problem, das sich im Mathematikunterricht stellt, betrifft nicht die formale Strenge, sondern die Entwicklung von Bedeutung, *und die* anschauliche *Erfassung der mathematischen Objekte.*
  René Thom (Fields-Medaillen-Gewinner), 1972

- Alternative: Kalkülorientiertes, oft wenig von Verständnis geprägtes sowie fehleranfälliges Vorgehen. Kalkül ja – aber auf der Grundlage von Grundvorstellungen!
- Statische oder dynamische Interpretation math. Größen? – Beides ist wichtig.

Fazit II: Zahlbereiche

- Aufgabenspektrum der Zahlen. Anlegen von tragfähigen Grundvorstellungen, Aktivierung von Vorerfahrungen (Kardinalaspekt, Ordinalaspekt, Maßzahlaspekt,. . .)
- (verschiedene) Darstellungsformen für Zahlen (Veranschaulichung durch Mengen gleichartiger Objekte, Perlenkettenmodell; eindeutige Darstellung im Dezimalsystem, basierend auf Bündelung)
- Ordnen und Vergleichen (auf Basis der (weiter)entwickelten Vorstellungen, $\rightsquigarrow$ Reihenfolge in Zählreihe am Zahlenstrahl
- Wie können wir mit den Zahlen rechnen? (auf Basis der (weiter)entwickelten Vorstellungen)
  - Addition und Subtraktion (Zusammenfügen/Hinzufügen von Mengen/Größen, Schritte am Zahlenstrahl)
  - Multiplikation und Division (Fortgesetzte Addition, flächige Anordnung)