Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
A. Filler

Sommersemester 2020

Zusammenfassende Notizen zu der Vorlesung

Didaktik der Algebra und Zahlentheorie

3 Zur Behandlung der rationalen Zahlen

3.1 Historische Bemerkungen

Antike (Griechenland):

- Zunächst nur natürliche Zahlen (ohne die Zahl Null) und Verhältnisse natürlicher Zahlen (bis ins 6. Jahrhundert). Irrationale Zahlen (als Streckenverhältnisse) wurden bereits entdeckt (Hippasos, ca. 400 v. Chr.). Negative Zahlen wurden jedoch nicht betrachtet.

Indien:

- Einführung der Zahl Null und der negativen Zahlen in die Mathematik im 7. Jahrhundert.

Europa:

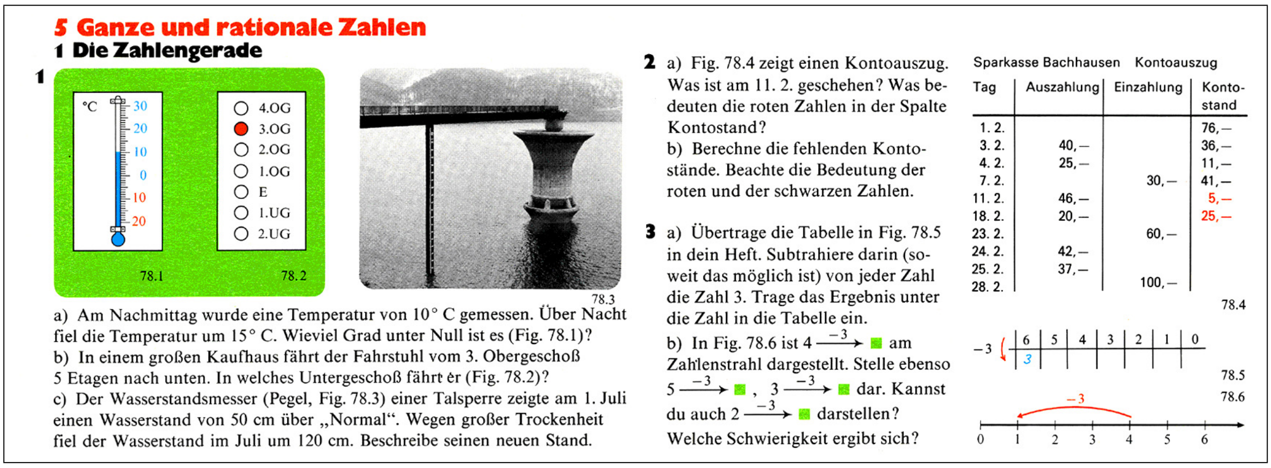
- FRANCOIS VIETA (1540–1603) vermied negative Zahlen.
- RENE DESCARTES (1596–1650) sprach von falschen Lösungen, wenn eine Gleichung negative Zahlen als Lösung hatte.
- CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855): *„Positive und negative Zahlen können nur da eine Verwendung finden, wo das Gezählte ein Entgegengesetztes hat, was mit ihm vereinigt gedacht, der Vernichtung gleichzustellen ist."*

3.2 Herangehensweisen / Beispiele zur Einführung negativer Zahlen

Aus dem täglichen Leben sind negative Zahlen vor allem in zwei Zusammenhängen vertraut:

- *Temperaturen* (über/unter 0°C),
- *Kontostände* (Soll/Haben).

Ein drittes Beispiel sind Höhenangaben (über/unter NN).



5 Ganze und rationale Zahlen

1 Die Zahlengerade

1 a) Am Nachmittag wurde eine Temperatur von 10° C gemessen. Über Nacht fiel die Temperatur um 15° C. Wieviel Grad unter Null ist es (Fig. 78.1)?
b) In einem großen Kaufhaus fährt der Fahrstuhl vom 3. Obergeschoß 5 Etagen nach unten. In welches Untergeschoß fährt er (Fig. 78.2)?
c) Der Wasserstandsmesser (Pegel, Fig. 78.3) einer Talsperre zeigte am 1. Juli einen Wasserstand von 50 cm über „Normal". Wegen großer Trockenheit fiel der Wasserstand im Juli um 120 cm. Beschreibe seinen neuen Stand.

2 a) Fig. 78.4 zeigt einen Kontoauszug. Was ist am 11. 2. geschehen? Was bedeuten die roten Zahlen in der Spalte Kontostand?
b) Berechne die fehlenden Kontostände. Beachte die Bedeutung der roten und der schwarzen Zahlen.

3 a) Übertrage die Tabelle in Fig. 78.5 in dein Heft. Subtrahiere darin (soweit das möglich ist) von jeder Zahl die Zahl 3. Trage das Ergebnis unter die Zahl in die Tabelle ein.
b) In Fig. 78.6 ist $4 \xrightarrow{-3} \blacksquare$ am Zahlenstrahl dargestellt. Stelle ebenso $5 \xrightarrow{-3} \blacksquare$, $3 \xrightarrow{-3} \blacksquare$ dar. Kannst du auch $2 \xrightarrow{-3} \blacksquare$ darstellen? Welche Schwierigkeit ergibt sich?

Sparkasse Bachhausen Kontoauszug

Tag	Auszahlung	Einzahlung	Kontostand
1. 2.			76,–
3. 2.	40,–		36,–
4. 2.	25,–		11,–
7. 2.		30,–	41,–
11. 2.	46,–		5,–
18. 2.	20,–		25,–
23. 2.		60,–	
24. 2.	42,–		
25. 2.	37,–		
28. 2.		100,–	

78.4

	6	5	4	3	2	1	0
−3	3						

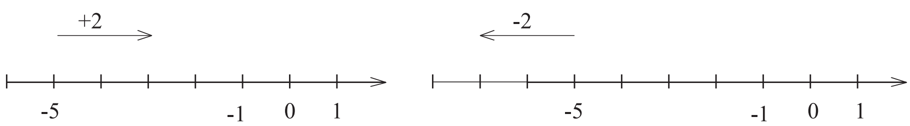
78.5

78.6

Einführung negativer Zahlen in einem älteren Schulbuch (Gamma 7, Hauptschule)

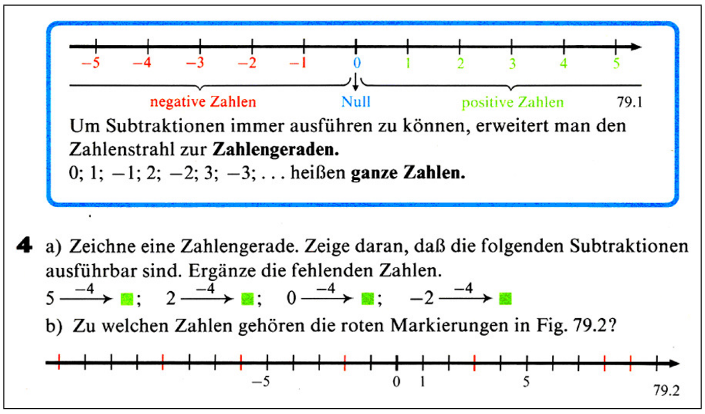
Von Anfang an sollten die Zahlengerade und die Ordnung auf ihr betrachtet werden.

- $-5+2=\ ?$ *Es ist* $-5°C$ *kalt und wird um* $2°C$ *wärmer/kälter. Welche Temperatur herrscht jetzt?*
- $-5-2=\ ?$ (Entsprechend bei Höhenangaben, Kontoständen usw.)



Die Zahlengerade hat hohe Bedeutung für das Verständnis von und die Arbeit mit rationalen Zahlen. Die obigen Beispiele zeigen, dass sich durch inhaltliche Überlegungen anhand der Zahlengeraden auch einfache Aufgaben lösen lassen, ohne dafür Regeln zu kennen. Genutzt werden sollte dazu auch der sehr leicht herzustellende Bezug zwischen der Zahlengeraden und einer Thermometerskale.

Auch für die Einführung / Begriffsbestimmung der rationalen Zahlen ist die Zahlengerade bedeutsam:


−5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5

negative Zahlen Null positive Zahlen 79.1

Um Subtraktionen immer ausführen zu können, erweitert man den Zahlenstrahl zur **Zahlengeraden.**

0; 1; −1; 2; −2; 3; −3; ... heißen **ganze Zahlen.**

4 a) Zeichne eine Zahlengerade. Zeige daran, daß die folgenden Subtraktionen ausführbar sind. Ergänze die fehlenden Zahlen.

$5 \xrightarrow{-4} ■$; $2 \xrightarrow{-4} ■$; $0 \xrightarrow{-4} ■$; $-2 \xrightarrow{-4} ■$

b) Zu welchen Zahlen gehören die roten Markierungen in Fig. 79.2?

−5 0 1 5 79.2

Schulbuchkopie: Gamma 7 (Hauptschule)

Die negativen rationalen Zahlen werden durch *Symmetrisierung* aus den gebrochenen Zahlen gewonnen ⇒ Erweiterung des *Zahlenstrahls zur Zahlengeraden* durch Spiegelung am Nullpunkt.

Ein weiterer wichtiger Aspekt ist der der „Gegenzahlen“:

Der Bereich der rationalen Zahlen ergibt sich als Vereinigung der Menge der gebrochenen Zahlen und der Menge der zu ihnen entgegengesetzten Zahlen.

Anmerkung: Es handelt sich hierbei nicht um eine fachlich saubere Definition des Bereichs der rationalen Zahlen, sondern um eine Möglichkeit, diesen Bereich in der Sekundarstufe I anschaulich und plausibel einzuführen.

Weiterer Aspekt: Rationale Zahlen sind *Äquivalenzklassen von Paaren differenzengleicher gebrochener Zahlen* (Beispiel: Gutschein-/Schuldscheinmodell, siehe weiter hinten).

Probleme mit der Kleiner-Relation

„Kleiner als“ bedeutete in den natürlichen Zahlen auch:

- „weniger der Anzahl nach“,
- „kommt beim Zählen eher dran“,
- „hat höchstens so viele Stellen wie“.

Der Rückgriff auf die Zahlengerade ist wichtig, um Irrtümer zu vermeiden, gibt dafür jedoch noch keine Gewähr: Es besteht die Gefahr, dass die Schüler die Zahlen „in zwei Hälften aufteilen“, die positiven und die negativen und jede Hälfte für sich betrachten.

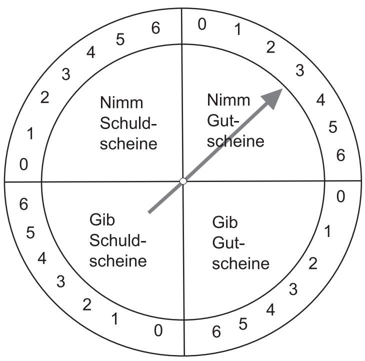
Möglicher Denkfehler: $-279 > -2$, denn $279 > 2$

(denn 279 € Schulden sind ja auch mehr als 2 € Schulden)

Abhilfe: Rückgriff ins Modell (kälter, weniger, tiefer), konsequentes Durchlaufen der Zahlengeraden von links nach rechts, „kleiner“ heißt „liegt links von“.

3.3 Einstiege in die Addition und Subtraktion rationaler Zahlen

Das Gutschein-/Schuldscheinspiel bzw. Gib-Nimm-Spiel



- Es stehen Gutscheine und Schuldscheine zur Verfügung. Ein Gutschein und ein Schuldschein heben sich im Wert auf.
- Durch einen Zufallsmechanismus erhalten die Schüler Befehle der Art „Nimm ... Gutscheine“, „Nimm ... Schuldscheine“, „Gib ... Gutscheine ab', „Gib ... Schuldscheine ab“.
- Gewonnen hat, wer am Ende des Spiels am reichsten ist.

Siehe ausführlicher (Sie können den folgenden Link anklicken):

https://mathematik.bildung-rp.de/fileadmin/user_upload/mathematik.bildung-rp.de/Sinus_und_Sinus-Transfer/4.1_OA_7__pdf_/3.3_Gib-Nimm-Spiel.pdf

Das Spiel steht der Auffassung von ganzen Zahlen als Klassen differenzengleicher Paare natürlicher Zahlen nahe (Äquivalenzklassenkonzept). So wird die Zahl -5 durch 0 Gutscheine und 5 Schuldscheine, oder 1 Gutschein und 6 Schuldscheine oder 7 Gutscheine und 12 Schuldscheine usw. repräsentiert.

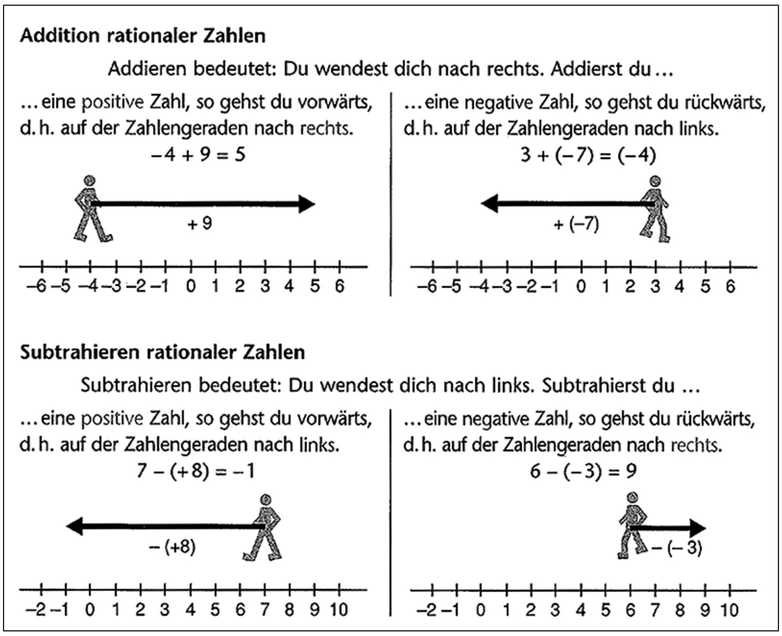
Statt allgemeiner Regeln zum Addieren/Subtrahieren ganzer (rationaler) Zahlen sind beispielgebundene Formulierungen für viele Schülerinnen und Schüler hilfreicher:

6 – (–2) rechne ich als 6 + 2 **6 + (–2) rechne ich als 6 – 2**

Eine Begründung kann über das Spiel gegeben werden:

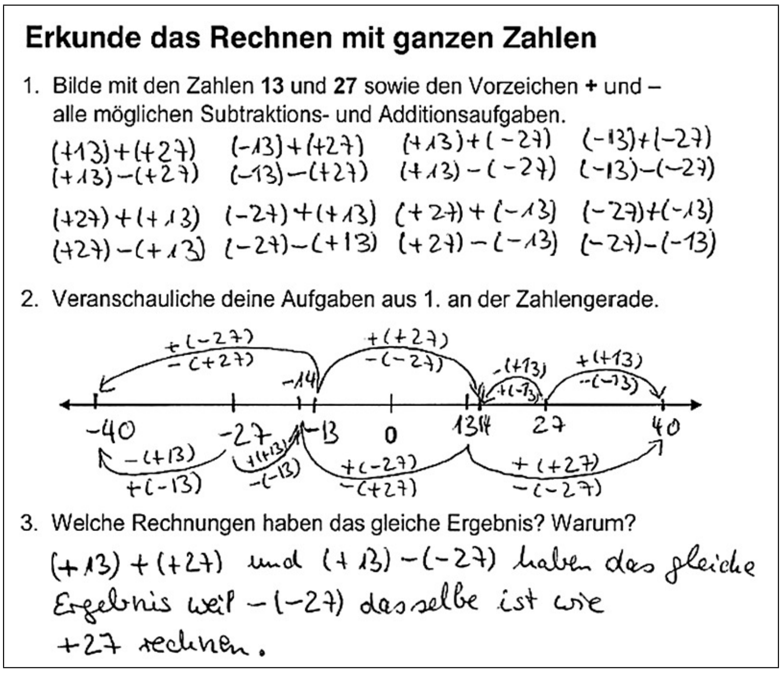
- Statt Schuldscheine abzugeben, kann ich Gutscheine aufnehmen: 6 – (–2) = 6 + 2
- Statt Schuldscheine aufzunehmen, kann ich Gutscheine abgeben: 6 + (–2) = 6 – 2

Veranschaulichung der Addition/Subtraktion durch Vorwärts- und Rückwärtslaufen



Aus dem Schulbuch Neue Wege 7

Aufhebung der Trennung Rechenzeichen – Vorzeichen



Folie von J. Roth, Universität Koblenz-Landau nach dem Beitrag von Rezat: Rechnen mit ganzen Zahlen – Den Zahlenblick für Addition und Subtraktion schulen. In: Mathematik lehren 171 (2012), S. 23.

Permanenzreihen

Als Ergänzung zu der zuvor gegebenen modellhaften Begründung lassen sich *Permanenzreihen* betrachten, bei denen Schülerinnen und Schüler einfache Rechenreihen gesetzmäßig fortsetzen:

$$\begin{array}{lcl@{\qquad\qquad}lcl@{\qquad\qquad}lcl}
3+2 & = & 5 & 3-2 & = & 1 & 5-2 & = & 3\\
3+1 & = & 4 & 3-1 & = & 2 & 4-1 & = & 3\\
3+0 & = & 3 & 3-0 & = & 3 & 3-0 & = & 3\\
3+(-1) & = & & 3-(-1) & = & & 2-(-1) & = & \\
3+(-2) & = & & 3-(-2) & = & & 1-(-2) & = & \\
3+(-3) & = & & 3-(-3) & = & & 0-(-3) & = &
\end{array}$$

3.4 Das Permanenzprinzip

Die Rechenregeln für die Addition wurden so **festgelegt**, dass die (bisher für positive Zahlen bekannten) Rechenregeln weiterhin, das heißt, über den alten Bereich auch im neuen Gültigkeit behalten.

Dies ist ein zentraler formaler (und auch didaktischer) Leitgedanke der Mathematik.

Erweiterung von Definitionen auf neue Gültigkeitsbereiche (hier: von den positiven rationalen auf alle rationalen Zahlen) fallen nicht vom Himmel, sondern werden **bewusst so gewählt**, dass

- sie die Rechenregeln des alten Bereichs sinnvoll fortsetzen, d. h.
- dass die aus ihnen folgenden, im alten Bereich bestehenden Gesetze möglichst Bestand behalten.

(Dann kann man nämlich in der neuen Struktur einfach so weiter rechnen, wie man es gewohnt ist.)

Herleitung der Definition der Addition rationaler Zahlen aus dem Permanenzprinzip

Fordert man zu jedem $b \in \mathbb{B}$ ein eindeutiges $-b$ mit

(–) $$b + (-b) = 0.$$

und zusätzlich für die neue Festlegung von $+$, dass

Assoziativgesetze	$a + (b + c) = (a + b) + c,$ $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
Kommutativgesetze	$a + b = b + a, \qquad a \cdot b = b \cdot a$
Distributivgesetz	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
Eigenschaften der Null	$a + 0 = a, \qquad a \cdot 0 = 0$

für alle „alten" wie „neuen" Zahlen gelten, so folgt daraus für beliebige $a, b \geq 0$

$$\begin{array}{lrclcl}
(1) & a + (-b) & = & (-b) + a & = & a - b \quad , \quad \text{falls } a \geq b,\\
(2) & a + (-b) & = & (-b) + a & = & -(b - a) \quad , \quad \text{falls } b \geq a,\\
(3) & (-a) + (-b) & = & -(b + a) & . &
\end{array}$$

Beweis:

(1) Fordert man die Permanenz des Kommutativgesetzes, so folgt zunächst

$$a + (-b) = (-b) + a.$$

Weiter gilt, da $a \geq b$, nach Definition der Subtraktion in $\mathbb{N}$:

$c := a - b$ ist die eindeutig bestimmte natürliche Zahl, für die $c + b = a$ gilt. Es gilt also

$$a - b \overset{\text{Null}}{=} a - b + 0 \overset{(-)}{=} (a - b) + (b + (-b)) \overset{\text{Ass.}}{=} (a - b + b) + (-b) \overset{a-b+b=a\in\mathbb{N}}{=} a + (-b).$$

(2) Sind $b \geq a \geq 0$, so ist $b + (-a) = b - a \geq 0$ nach (1). Somit gilt

$$0 \overset{(-),\,\text{Komm.}}{=} a + (-b) + b + (-a) \overset{\text{Ass.},\,(1)}{=} (a + (-b)) + (b - a)$$

also ist $a + (-b)$ die eindeutig definierte Gegenzahl von $b - a$, d. h.

$$a + (-b) = -(b - a).$$

Wegen der Permanenz des Kommutativgesetzes muss auch

$$(-b) + a = a + (-b) = -(b - a)$$

gelten.

(3) siehe Übungsaufgaben

Zusammenfassung:
Gelten für eine Verknüpfung $+$ auf $\mathbb{Q}$ das Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz sowie die Eigenschaften der Null, so folgt daraus

$$\begin{array}{lrcccll} (1) & a + (-b) & = & (-b) + a & = & a - b & , \quad \text{falls } a \geq b \geq 0, \\ (2) & a + (-b) & = & (-b) + a & = & -(b - a) & , \quad \text{falls } b \geq a \geq 0, \\ (3) & (-a) + (-b) & = & -(b + a) & . & & \end{array}$$

Damit ist gleichbedeutend (*Kontraposition*): Legt man die Rechenvorschriften *nicht* wie in (1), (2), (3) fest, so wird mindestens eines der Rechengesetze (Kommutativ-, Assoziativ-, Distributivgesetz, Eigenschaften der Null) verletzt.

3.5 Multiplikation rationaler Zahlen

W. R. HAMILTON (irischer Mathematiker 1805–1865) fragte sich noch 1833, wie es erklärlich ist, *„dass zwei Zahlen, die weniger als nichts sind, ein Produkt haben können, das mehr als nichts sein soll.“*

Weitere Äußerungen zu der Thematik:

„Fast kein Abiturient ... weiß (das heißt: versteht einem Anderen klarzumachen), warum zum Beispiel ‚Minus mal Minus Plus‘ gibt.“ WAGENSCHEIN, 1962

„... nur einige der leistungsstärksten Schüler erfassen, dass es sich bei der Einführung negativer Zahlen um eine Zahlbereichserweiterung im systematischen Sinne handelt, schwächere Schüler legen sich eine Art "Regel-Hilfs-Welt"für das Rechnen zu.“
Speziell: *„Bei der Multiplikation bleibt der Fall ‚Minus mal Minus‘am unsichersten“*. ANDELFINGER

Inhaltliche Begründungen

- ganze positive $\times$ negative Zahl deutbar als fortgesetzte Addition:

$$5 \cdot (-3) = (-3) + (-3) + (-3) + (-3) + (-3) = -15$$

„Schulden verfünffacht“

- positiver Bruch $\times$ negative Zahl ebenfalls deutbar: Schulden von 300 Euro halbiert, gedrittelt,... entspricht

$$\frac{1}{2} \cdot (-300), \quad \frac{1}{3} \cdot (-300) \quad (\text{„von-Ansatz“})$$

Problematischer:

- ganze negative $\times$ positive Zahl, ganze negative $\times$ negative Zahl
- Mögliche Deutung: Kontinuierliches Wegnehmen
(Umdeutung als fortgesetzte Subtraktion des zweiten Faktors)

$$(-5) \cdot 3 = -(5 \cdot 3) = -(15) = -15$$

(fünfmal 3 Euro wegnehmen)

$$(-5) \cdot (-3) = -(5 \cdot (-3)) = -(-15) = +15$$

(fünfmal 3 Euro Schulden wegnehmen)

$\rightarrow$ wenig mathematische Einsicht

Aus fachwissenschaftlicher Sicht erscheint es als nicht zielführend, gerade für Rechenregeln wie „minus mal minus" inhaltliche (d. h. lebensweltlich-anschauliche) Begründungen liefern zu wollen. Die formal-abstrakte Sichtweise ist ein wesentliches Charakteristikum der Mathematik.

Darüber hinaus müssen Schülerinnen und Schüler aber erfahren, woher die Regeln kommen. Auch dies schließt ein Verständnis von Mathematik als formal-abstrakter Disziplin ein. ***Permanenzreihen*** *sind mit Blick auf die Fragestellung ideal, weil sie spielerisch die abstrakte Seite der Mathematik zugänglich machen und den* ***Kern (Fortsetzung der Rechengesetze)*** *treffen.*[1]

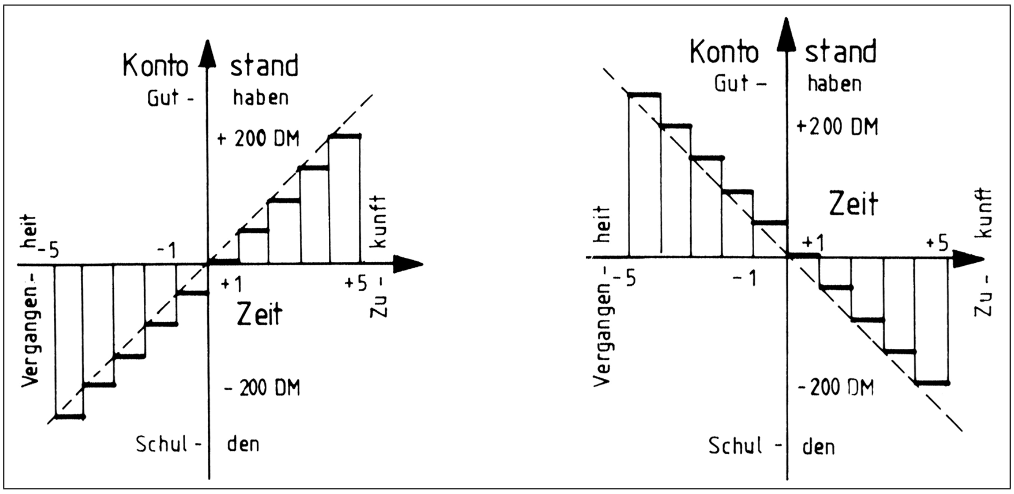
„Verpackte" Permanenzreihen: Das Kontomodell (nach Winter)

„Auf ein Konto wurde bis jetzt zu jedem Monatsersten ein Betrag von 50 €[2] *eingezahlt, und das soll auch weiter so geschehen. Heute ist ein Monatserster, es ist ein Eingang von 50 € gewesen, und der Kontostand ist jetzt ausgeglichen."*

–2	für	„vor 2 Monaten"
+3	für	„in drei Monaten"
–100 €	für	„100 € Schulden"
+50 €	für	„50 € Guthaben".

Kontostand in drei Monaten:	+150 €	=	(+3) · (+50 €)
Analogie: Kontostand vor drei Monaten:	–150 €	=	(–3) · (+50 €)

(+3) · (+50 €)	=	+150 €	(+3) · (–50 €)	=	–150 €
(+2) · (+50 €)	=	+100 €	(+2) · (–50 €)	=	–100 €
(+1) · (+50 €)	=	+50 €	(+1) · (–50 €)	=	–50 €
0 · (+50 €)	=	0 €	0 · (–50 €)	=	0 €
(–1) · (+50 €)	=	–50 €	(–1) · (–50 €)	=	+50 €
(–2) · (+50 €)	=	–100 €	(–2) · (–50 €)	=	+100 €
(–3) · (+50 €)	=	–150 €	(–3) · (–50 €)	=	+150 €



[1]Walcher, S.; Wittmann, E. Ch. (2012): »Minus mal minus« Zum Fundament der COACTIV-Studie. In: MNU 65/6 (1.9.2012), 371-377.

[2]Die Beschreibung des Modells ist dem (sehr empfehlenswerten) Buch *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht* von Heinrich Winter (Braunschweig: Vieweg, 1991; Neuauflage Heidelberg: Springer Spektrum, 2016) entnommen. Die Angaben waren dort ursprünglich in DM gemacht (siehe die Abbildungen) und wurden hier einfach in € abgeändert.

Das Permanenzprinzip bei der Multiplikation rationaler Zahlen

Fordert man zu jedem $b \in \mathbb{B}$ ein eindeutiges $-b$ mit

$$\textbf{(–)} \qquad b + (-b) = 0.$$

und zusätzlich für die neue Festlegung von $+$ und $\cdot$ dass

Assoziativgesetze	$a + (b + c) = (a + b) + c,$ $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
Kommutativgesetze	$a + b = b + a, \qquad a \cdot b = b \cdot a$
Distributivgesetz	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
Eigenschaften der Null	$a + 0 = a, \qquad a \cdot 0 = 0$

für alle „alten“ wie „neuen“ Zahlen gelten, so folgt daraus für beliebige a, b

$$\begin{array}{lrcl} (\mathrm{M1}) & a \cdot (-b) & = & (-b) \cdot a = -(a \cdot b), \\ (\mathrm{M2}) & (-a) \cdot (-b) & = & a \cdot b \quad . \end{array}$$

Beweis: siehe Übungsaufgaben.

3 *Minus mal Minus gibt …?*
Um das herauszufinden benutzen wir einen Trick. Das Verteilungsgesetz (Distributivgesetz) kennst du schon. Auch für negative Zahlen soll das Distributivgesetz gelten. Julia und Thomas rechnen:

a) Julia rechnet:
(–3) · [(+6) + (–6)] = …
Setze Julias Rechnung fort.
Welches Ergebnis erhält sie?

b) Thomas rechnet:
(–3) · [(+6) + (–6)] = (–3) · (+6) + (–3) · (–6) = …
Das Ergebnis von Julia kennt er. Außerdem weiß er, dass (–3) · 6 = –18. Welches Ergebnis muss er für (–3) · (–6) einsetzen, damit die Rechnung stimmt?

c) Welches Vorzeichen muss man für das Produkt von zwei negativen Zahlen festlegen, damit das Distributivgesetz gültig bleibt?

Julia: „Ich rechne zuerst die eckige Klammer aus!“

Thomas „Ich löse zuerst die Klammer mit dem Verteilungsgesetz auf. (–3) · (+6) kann ich an der Zahlengeraden erklären.“

Aus dem Schulbuch Neue Wege 7

Eine weitere auf dem Permanenzprinzip beruhende Argumentation:

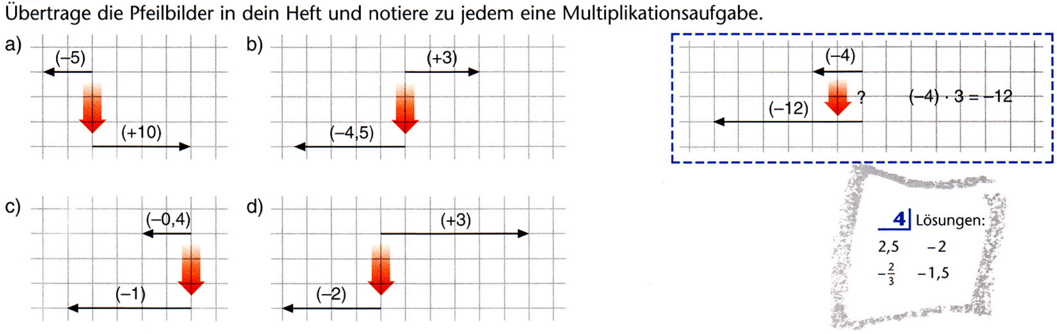
„Was wäre, wenn minus mal minus minus gäbe? Und wir rechnen wollen wie bisher?“

$$\begin{array}{rcl} (-2) \cdot 0 & = & 0 \\ (-2) \cdot (1 + (-1)) & = & 0 \\ (-2) \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) & = & 0 \\ -4 & = & 0. \end{array}$$

(Dies ist kein Beweis dafür, dass „minus x minus = plus“ die einzig sinnvolle Festlegung ist – nur dafür, dass „minus x minus = minus“ nicht gut ist. Analoge „Katastrophenbeispiele“ lassen sich aber für *jede* Festlegung finden, die nicht „minus x minus = plus“ ist – das folgt aus unserer Betrachtung zum Permanenzprinzip.)

Geometrische Veranschaulichung der Multiplikation – Inversion

4 *Strecken und Stauchen*
Übertrage die Pfeilbilder in dein Heft und notiere zu jedem eine Multiplikationsaufgabe.



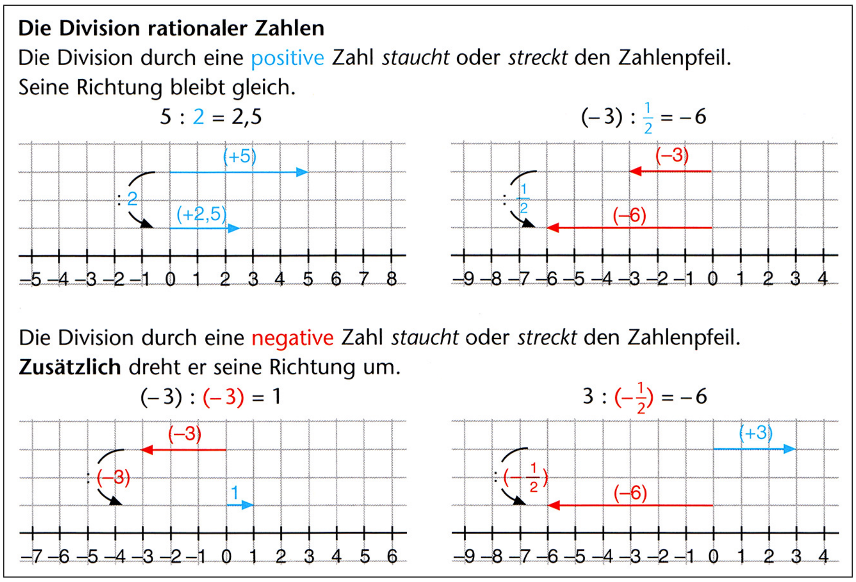
Aus dem Schulbuch Neue Wege 7

- Multiplikation mit *positiver* Zahl *streckt/staucht* den Zahlpfeil.

- Multiplikation mit *negativer* Zahl *streckt/staucht* den Zahlpfeil und *kehrt seine Richtung um*.

Division rationaler Zahlen

- kann ebenfalls anschaulich gedeutet werden,
- ist nach wie vor Umkehroperation zur Multiplikation,
- entspricht der Multiplikation mit dem Kehrwert des Dividenden (Permanenz).



Aus dem Schulbuch Neue Wege 7

Fazit zur Multplikation

Der definitorische Charakter der Rechenregeln sollte klar werden, ihre Zweckmäßigkeit deutlich werden und der Umgang mit ihnen handlungsorientiert praktiziert werden.

> *Es gibt in der Mathematik Freiheitsmomente. Wir können uns für das eine oder das andere entscheiden. Der Hinweis auf das Permanenzprinzip (oder anderes) ist kein logisches Argument. Wir haben die Freiheit, uns zum einen oder anderen zu entscheiden. In den Folgen sind wir aber nicht mehr frei. Wir erzeugen Harmonie indem wir den einen Fall (das minus mal minus plus ist) wählen. Zugleich schließen wir uns damit den Entscheidungen anderer Menschen in der Vergangenheit und Gegenwart an.* (E. Schuberth)