Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
A. Filler

Sommersemester 2020

Zusammenfassende Notizen zu der Vorlesung

Didaktik der Algebra und Zahlentheorie

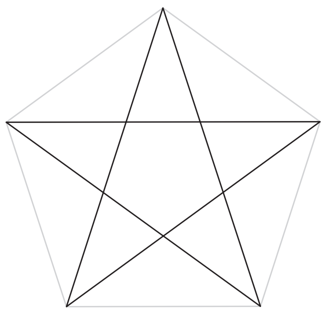
4 Reelle Zahlen im Mathematikunterricht der S I

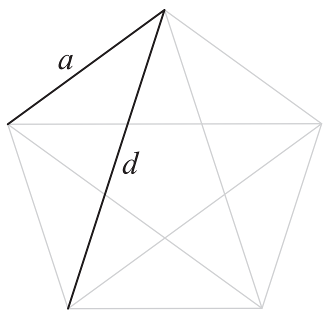
4.1 Historische und didaktische Vorbemerkungen

4.1.1 Historische Bemerkungen zur Entdeckung irrationaler Zahlen

Irrationale Zahlen wurden zunächst als *inkommensurable Strecken* (Strecken ohne gemeinsames „Maß", d. h. mit einem irrationalen Längenverhältnis) entdeckt.

- Pentagramm: Wahrzeichen der Pythagoreer





$$\frac{d}{a} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

- Hippasos von Metapont (6.-5. Jh. v. Chr.): Verhältnis von Diagonalen- und Seitenlänge im regelmäßigen Fünfeck ist irrational.
- „Grundlagenkrise" des pythagoreischen Weltbildes oder Geheimnisverrat? („Strafe der Götter": Hippasos ertrank im Meer.)

4.1.2 Einführung reeller Zahlen – Grundgedanken

- Die Einführung der reellen Zahlen lässt sich nicht aus praktischen Messaufgaben rechtfertigen. In realen Situationen, insbesondere bei Messungen, treten irrationale Zahlen niemals direkt auf.
- Auf irrationale Zahlen stößt man bei der *theoretischen Untersuchung* geometrischer und algebraischer Probleme (z. B. Diagonalenlänge eines Quadrats, Goldener Schnitt im Fünfeck, Kreisumfang).
- Der Übergang von den rationalen zu den reellen Zahlen ist also eine *aus theoretischen Gründen zweckmäßige Erweiterung* des Zahlbereichs. Durch sie wird gesichert, dass für gewisse anschaulich vorhandene Lösungen auch in der Theorie wohlbestimmte Objekte existieren.
- Irrationale Zahlen können durch rationale Zahlen eingeschachtelt werden. Dabei hilft oft die Interpretation in dem geometrischen/algebraischen Kontext, dem das Problem entsprang.
- Die Entscheidung, ob eine Maßzahl oder eine Gleichungslösung rational ist oder nicht, kann nicht experimentell-empirisch erfolgen, auch nicht durch Ausrechnen mittels Computer, sondern nur mittels theoretischer Argumentation.[1]

4.1.3 Zugänge zu irrationalen Zahlen

Meist (fast immer) werden irrationale Zahlen im Zusammenhang mit Wurzeln eingeführt. Folgende Problemstellungen können in Klasse 9 auf $\sqrt{2}$ führen:

- Bestimme die Zahl(en), deren Quadrat 2 ist.

[1]nach A. Kirsch: Mathematik wirklich verstehen. Aulis-Verlag Deubner, 1997

- Bestimme zu einem gegebenen Quadrat die Seitenlänge eines Quadrats mit doppeltem Flächeninhalt.
- Wie lang ist eine Diagonale eines Quadrats der Seitenlänge 1?
- Beim *DIN-Format* bleibt bei einer Halbierung der Seite das Verhältnis der Seitenlängen gleich. Wie groß muss das Verhältnis sein?
- Beim *goldenen Schnitt* wird eine Strecke so geteilt, dass das Verhältnis der Gesamtstrecke zu der längeren Teilstrecke gleich dem Verhältnis der beiden Teile ist. Wie groß ist das *Teilungsverhältnis*? (Diese Überlegung führt aber nicht auf $\sqrt{2}$, sondern auf $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.)

4.2 Intervallschachtelungen

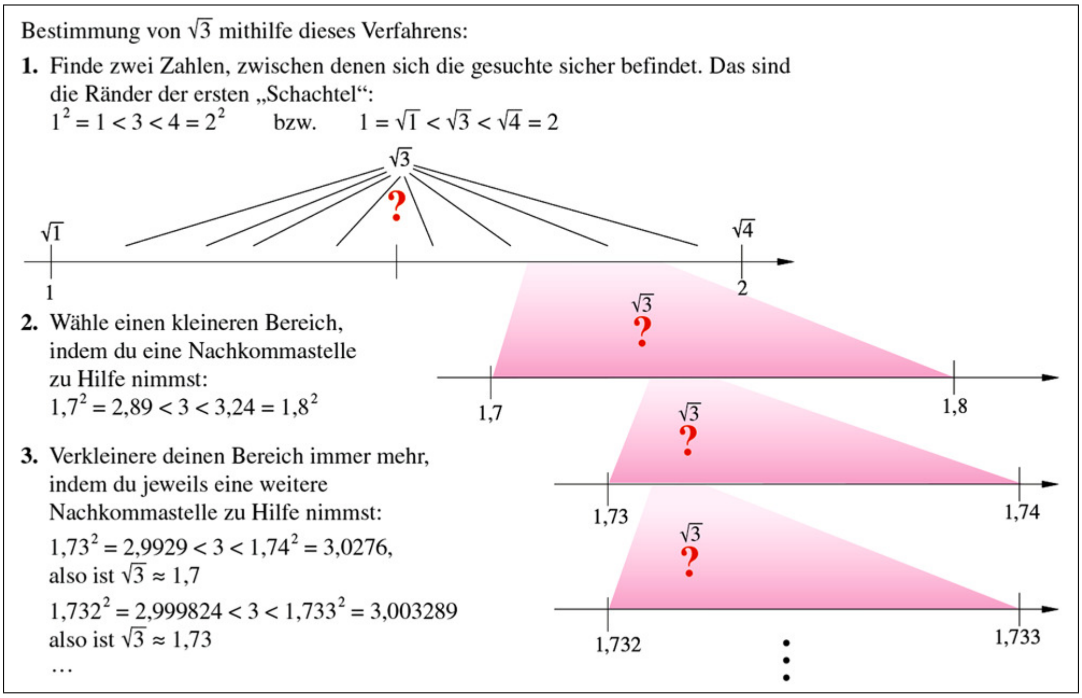
Bestimmung eines Näherungswertes für $\sqrt{2}$ über Intervallschachtelung

- $\sqrt{2}$ ist größer als 1 und kleiner als 2, denn $1^2 < 2$ und $2^2 > 2$.
- Bildung der Intervallmitte – liegt $\sqrt{2}$ zwischen 1 und $1,5$ oder zwischen $1,5$ und 2 (oder ist $\sqrt{2} = 1,5$)?
- $1,5^2 > 2$, also liegt $\sqrt{2}$ zwischen 1 und $1,5$.
- Bildung der Intervallmitte: $1,25$ ... und weiter ...

Anfangswert	Endwert	Mittelwert	Mittelwert^2	Mittelwert^2 > 2?
1	2	1,5	2,25	ja
1	1,5	1,25	1,5625	nein
1,25	1,5	1,375	1,890625	nein
1,375	1,5	1,4375	2,06640625	ja

- Sinnvoll: Computernutzung (Tabellenkalkulation)

Neben der Intervallhalbierung (Bisektionsverfahren) sind auch andere Methoden der „Einschachtelung“ irrationaler Zahlen möglich. Der Bezug zu dem Stellenwertsystem tritt bei „Intervallzehntelung“ besonders deutlich hervor.


Bestimmung von $\sqrt{3}$ mithilfe dieses Verfahrens:

1. Finde zwei Zahlen, zwischen denen sich die gesuchte sicher befindet. Das sind die Ränder der ersten „Schachtel“:
$1^2 = 1 < 3 < 4 = 2^2$ bzw. $1 = \sqrt{1} < \sqrt{3} < \sqrt{4} = 2$

2. Wähle einen kleineren Bereich, indem du eine Nachkommastelle zu Hilfe nimmst:
$1,7^2 = 2,89 < 3 < 3,24 = 1,8^2$

3. Verkleinere deinen Bereich immer mehr, indem du jeweils eine weitere Nachkommastelle zu Hilfe nimmst:
$1,73^2 = 2,9929 < 3 < 1,74^2 = 3,0276$,
also ist $\sqrt{3} \approx 1,7$
$1,732^2 = 2,999824 < 3 < 1,733^2 = 3,003289$
also ist $\sqrt{3} \approx 1,73$
…

Näherungsweise Bestimmung von $\sqrt{3}$ mittels „Intervallzehntelung“ in einem Schulbuch: Fokus 4 (Mathematik 8 B/W), Cornelsen, 2007.

Nach diesen Überlegungen führt dasselbe Schulbuch den Begriff „reelle Zahl“ folgendermaßen ein:

Beispiele für irrationale Zahlen sind:
$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$; $\sqrt{21}$, aber auch π oder 0,1002000300004000005… oder 1,22333444455555….

Die Menge der **reellen Zahlen** $\mathbb{R}$ setzt sich zusammen aus der Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und der Menge der **irrationalen Zahlen**, den nicht abbrechenden und nicht periodischen Dezimalzahlen.
Jedem Punkt auf der Zahlengeraden ist nun **genau eine Zahl** zugeordnet: eine abbrechende bzw. periodische oder eine nicht abbrechende Dezimalzahl.

Aus: Fokus 4 (Mathematik 8 B/W), Cornelsen, 2007.

4.3 Nachweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$

Ist $\sqrt{2}$ wirklich irrational?

- Auch wenn das Verfahren der Intervallschachtelung über sehr viele Schritte geführt wird, ist noch nicht gesichert, dass es nicht doch irgendwann abbricht.
- Noch weniger ist gesichert, dass $\sqrt{2}$ kein endlicher oder periodischer Dezimalbruch ist.
- Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$ ist nötig (d. h. $\sqrt{2}$ lässt sich nicht durch $\frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ darstellen).

Widerspruchsannahme: Es gibt ein $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$.

- Dann können wir x als *vollständig gekürzten* Bruch schreiben; es gibt also *teilerfremde* natürliche Zahlen p, q mit
$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2.$$
- Es gilt also $p^2 = 2q^2$.
- p^2 ist also gerade; damit ist auch p gerade:
$$p = 2r, r \in \mathbb{N}$$
- Wegen $p^2 = 2q^2$ folgt daraus
$$4r^2 = 2q^2, \quad \text{also} \quad 2r^2 = q^2.$$
- Also ist auch q^2 eine gerade Zahl, somit ist auch q gerade.
- p und q haben also den gemeinsamen Teiler 2.
- Der Bruch $\frac{p}{q}$ ist daher *nicht vollständig gekürzt*, war aber als vollständig gekürzt gewählt – ein Widerspruch.
- Also ist $\sqrt{2}$ irrational.

Einschub: Indirektes Beweisen

Ein Mann wird beschuldigt, am 05.03.08 um 16:00 Uhr in A-Dorf einen Banküberfall begangen zu haben. Der Bankräuber war maskiert, so dass ihn niemand erkennen konnte. Der Angeklagte bestreitet, der Tater gewesen zu sein.

Ein Zeuge hat den Angeklagten am 05.03.08 um 17:00 Uhr in B-Dorf gesehen.

Ermittlungen der Polizei ergeben, dass die Strecke zwischen A-Dorf und B-Dorf nicht schneller als in 90 Minuten zurückgelegt werden kann.

Der Richter fällt folgendes Urteil:

„Der Angeklagte ist nicht der Bankräuber. Er wird deshalb freigesprochen. Angenommen, der Angeklagte wäre der Bankräuber, dann wäre er um 16:00 Uhr in A-Dorf gewesen und hätte frühestens um 17:30 Uhr in B-Dorf sein können. Das steht aber im Widerspruch zur Zeugenaussage. Also kann der Angeklagte die Bank nicht überfallen haben.“

Wie wurde da argumentiert?[2]

Der Anwalt verwendet eine bestimmte Argumentationsstrategie. In der Mathematik nennt man das einen indirekten Beweis. Dieser enthält stets folgende Beweisschritte:

1. Ich formuliere die Behauptung.
2. Ich nehme an, das Gegenteil der Behauptung wäre richtig.
3. Ich ziehe aus der Annahme richtige Folgerungen.
4. Ich führe die Folgerungen zu einem Widerspruch.
5. Ich ziehe die Schlussfolgerung, dass die Annahme dadurch widerlegt und die Behauptung bewiesen ist.

Mögliche Umsetzung im Unterricht – Beweispuzzle

Schneide die folgenden Teile aus und klebe sie in der richtigen Reihenfolge auf.

Man kann den Bruch $\frac{p}{q}$ mit 2 kürzen. (Er ist also nicht vollständig gekürzt.)
Man kann $\sqrt{2}$ als vollständig gekürzten Bruch schreiben: $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.
Man kann p schreiben als $p = 2 \cdot r$. (r ist eine natürliche Zahl.)
$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.
$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.
$\sqrt{2}$ ist eine rationale Zahl.
$2q^2 = p^2 = (2r)^2 = 4r^2$
q^2 ist durch 2 teilbar.
p^2 ist durch 2 teilbar.
q ist durch 2 teilbar.
p ist durch 2 teilbar.
WIDERSPRUCH!
$2 = (\frac{p}{q})^2 = \frac{p^2}{q^2}$
$2q^2 = p^2$
$q^2 = 2r^2$

Siehe ausführlicher in Sinus-RP: Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts – Quadratwurzeln und Irrationalzahlen (S. 36-41):

https://mathematik.bildung-rp.de/fileadmin/user_upload/mathematik.bildung-rp.de/Sinus_und_Sinus-Transfer/2.11_Quawu-Irrationalitaet.pdf

Alternativer (und verallgemeinerter) Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$

Behauptung: Für $a \in \mathbb{N}$ ist $\sqrt{a} = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$ genau dann, wenn a Quadratzahl.

Grundlage: Quadratzahlen sind genau die Zahlen, in denen jeder Primfaktor in einer geraden Anzahl vorkommt: $b = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n \Leftrightarrow b^2 = p_1 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n \cdot p_n$.

Beweis:

- Ist a Quadratzahl, also $a = b^2$ mit $b \in \mathbb{N}$, so ist $\sqrt{a} = b = \frac{b}{1}$.
- Ist umgekehrt $\sqrt{a} = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$, so ist $a = \frac{p^2}{q^2}$, also $p^2 = a \cdot q^2$.

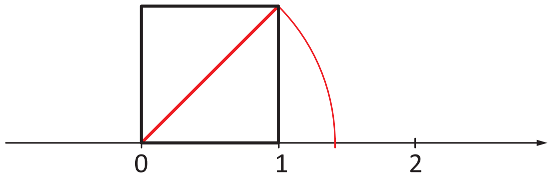
[2] Aus: Mathemagische Momente: Ein Projekt der GDM und der Deutschen Telekom Stiftung. Cornelsen, 2009.

p^2 und q^2 sind Quadratzahlen, also kommt in ihnen jeweils jeder Primfaktor in einer geraden Anzahl vor. Die Primfaktoren von p^2 sind das Produkt derer von a mit denen von q^2, also müssen auch in a alle Primfaktoren in gerader Anzahl vorkommen; a ist also eine Quadratzahl.

4.4 Geometrische Interpretation irrationaler Zahlen

Auch wenn der Zugang zu irrationalen Zahlen arithmetisch erfolgt, ist eine geometrische Interpretation von hoher Bedeutung.[3]

- Die rationalen Zahlen liegen auf der Zahlengerade zwar dicht.
- Dennoch bleiben „Löcher“.



Inkommensurabilität von Seiten- und Diagonalenlänge im Quadrat

Wenn für zwei Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ eine Strecke e existiert, sodass $\overline{AB} = m \cdot e$ und $\overline{CD} = n \cdot e$ mit $m, n \in \mathbb{N}$, so heißen $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ kommensurabel (besitzen ein gemeinsames Maß). Dies ist gleichbedeutend damit, dass die Strecken ein rationales Verhältnis $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{m}{n}$ besitzen.

Inkommensurabilitätsnachweis mittels „Wechselwegnahme“ (*La Descente Infinie – der unendliche Abstieg*)

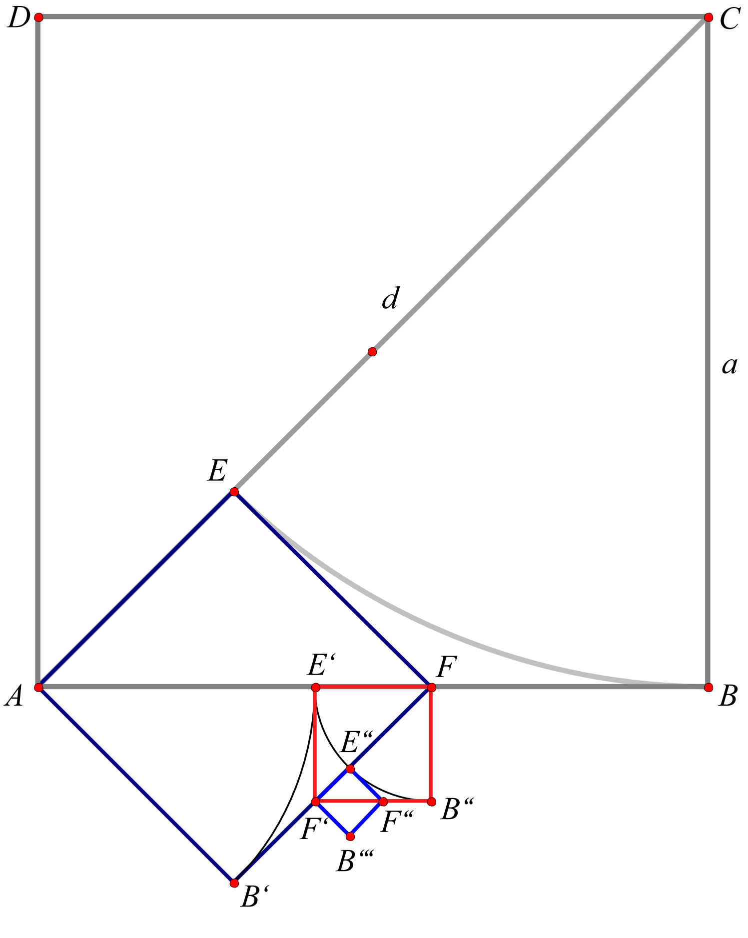
Wechselwegnahme: Methode, um das gemeinsame Maß zweier Strecken zu finden: man beginnt mit zwei Strecken a und b mit $a > b$, geht dann über zu b und $a - b$ und so weiter, bis irgendwann einmal die kleinere Strecke in der größeren ganzzahlig enthalten ist – man beachte die Analogie zum Euklidischen Algorithmus.

Um die Inkommensurabilität von Seiten- und Diagonalenlänge im Quadrat nachzuweisen, nimmt man an, dass die Seite a und die Diagonale d ein gemeinsames Maß e hätten (also eine Strecke e und $m, n \in \mathbb{N}$ mit $a = m \cdot e$, $d = n \cdot e$ existieren).

Wie in der Abbildung „subtrahiert“ man a von d und zeigt, dass dann auch die Diagonale und die Seite des entstehenden Quadrats $AB'FE$ Vielfache von e sind. (Man zeigt dazu mithilfe von Winkelbeziehungen und Kongruenzsätzen, dass $\overline{AE} = \overline{EF} = \overline{FB}$ gilt.)

Dieses Verfahren wird fortgeführt: e ist auch gemeinsames Maß der Seiten und Diagonalen in den Quadraten $F'B''FE'$, $F'B'''F''E''$ und beliebig vielen weiteren, auf dieselbe Weise zu konstruierenden Quadraten. Mit jeder „Konstruktionsstufe“ sind die Seiten und Diagonalen des „neuen“ Quadrats weniger als halb so lang wie die des vorherigen Quadrats.

Im k-ten Konstruktionsschritt ergibt sich damit eine Seitenlänge, die kleiner ist als $\frac{a}{2^k}$. Damit kann es kein Maß e geben, sodass $\frac{a}{2^k}$ für beliebige $k \in \mathbb{N}$ ein ganzzahliges Vielfaches von e ist.



[3] Empfohlen sei hierzu die entsprechende Passage in dem auch ansonsten sehr empfehlenswerten (hauptsächlich für Kinder geschriebenen) Buch „Der Zahlenteufel“ von Hans Magnus Enzensberger.

4.5 (Unendliche) Dezimalzahlen

4.5.1 Möglichkeiten der Konstruktion der reellen Zahlen

Von den möglichen Charakterisierungen der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ (u. a. über Dedekindsche Schnitte, siehe Analysis I) sind vor allem die folgenden als fachliche „Hintergründe" für die Konstruktion von $\mathbb{R}$ in der Schule relevant:

- $\mathbb{R}$ als die Menge von Klassen aller rationalen Intervallschachtelungen. Zwei Intervallschachtelungen $[a_n, b_n]$ und $[A_n, B_n]$ gehören derselben Klasse an, wenn $a_n \leq B_m$ und $A_n \leq b_m$ für alle $n, m \in N$.
- Konstruktion der reellen Zahlen als Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen. Zwei Cauchy-Folgen gehören derselben Klasse an, wenn ihre Differenzfolge eine Nullfolge ist.[4]

Für den Unterricht:

- Weg über *Intervallschachtelungen* (ohne Klassenbildung)
- Weg über *Cauchy-Folgen* als „Hintergrundidee" (*Dezimalzahlen* lassen sich als Cauchy-Folgen interpretieren.)

4.5.2 Unendliche Dezimalzahlen

Dezimalzahl:

$$d = \pm\left(n + q_1 \cdot 10^{-1} + q_2 \cdot 10^{-2} + q_3 \cdot 10^{-3} + q_4 \cdot 10^{-4} + q_5 \cdot 10^{-5} + \dots\right)$$

$n \in \mathbb{N}$,[5] $q_k \in \mathbb{N},\ 0 \leq q_k \leq 9$ für $k = 1 \dots \infty$

bzw.

$$d = \pm\left(n + \sum_{k=1}^{\infty} q_k \cdot 10^{-k}\right)$$

Einer Dezimalzahl lässt sich stets eine Zahlenfolge zuordnen:

$$(d_i)_{i=1\dots\infty} \quad \text{mit} \quad d_i = \pm\left(n + \sum_{k=1}^{i} q_k \cdot 10^{-k}\right)$$

- (d_i) ist eine Cauchyfolge.
- Dezimalzahlen lassen sich also Cauchyfolgen zuordnen, diese wiederum repräsentieren reelle Zahlen.

→ surjektive Abbildung von der Menge der Dezimalzahlen in die Menge der reellen Zahlen (Klassen von Cauchyfolgen).

Warum nur surjektiv und nicht bijektiv?

- $$0,\overline{9} = 0 + \sum_{k=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-k} = 0 + \sum_{k=1}^{\infty} q_k \cdot 10^{-k} \quad \text{mit } q_k = 9 \text{ für } k = 1 \dots \infty$$
  und
  $$1 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} 0 \cdot 10^{-k} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} q_k \cdot 10^{-k} \quad \text{mit } q_k = 0 \text{ für } k = 1 \dots \infty$$
  sind wegen der ungleichen Koeffizienten verschiedene Dezimalzahlen.
- *Aber:* Die Differenzfolge der beiden zugehörigen Cauchyfolgen $(d_i)_{i=1\dots\infty}$ und $(d'_i)_{i=1\dots\infty}$ mit
  $$d_i = 0 + \sum_{k=1}^{i} 9 \cdot 10^{-k} \ \text{ und } \ d'_i = 1 + \sum_{k=1}^{i} 0 \cdot 10^{-k}$$
  ist eine Nullfolge (für jedes $\epsilon > 0$ existiert ein i_0 mit $d_{i_0} - d'_{i_0} < \epsilon$).
- Es besteht eine Bijektion zwischen der Menge der *echten Dezimalzahlen* (für die *nicht* ab einem bestimmten Index k_0 alle Koeffizienten q_k gleich neun sind) und der Menge der reellen Zahlen.

[4]Siehe KRAMER; VON PIPPICH: *Von den natürlichen Zahlen zu den Quaternionen*. Springer, 2013, S. 119ff. sowie HENN: *Elementare Geometrie und Algebra*, Vieweg, 2003, S. 182 ff.

[5]Es sind hier die natürlichen Zahlen *einschließlich der Null* gemeint.

4.6 Zusammenfassung und Fazit

- *Aufgabenspektrum der neuen Zahlen*
  (beschreiben endliche Größen, die mit geeigneten Mitteln fassbar sind: Länge von Diagonalen, Flächeninhalt eines Kreises, Verhältnis beim Goldenen Schnitt, ... – *theoretischer Zweck*)
- *Darstellungsformen, Schreibweisen für Zahlen*
  (unendlich lange Dezimaldarstellung, nur durch konstruierte Symbole wie z.B. e, π, $\sqrt{2}$ eindeutig bezeichnet; einer der ersten Kontakte mit *Grenzwerten*, *Approximationen*, *Iterationen*)
- *Ordnen und Vergleichen*
  (über Dezimalbruchentwicklung, selten thematisiert)
- *Wie können wir mit den Zahlen rechnen?*
  (Wird in der Schule meist nicht hinterfragt, Rechengesetze werden wie selbstverständlich verwendet.)

Fazit (nach Heiner Stauff[6]):

> Wenn gilt: Rationale Zahlen sind gerade die als Bruch oder Dezimalbruch (endlich oder periodisch) schreibbaren Zahlen, und wenn zudem bewiesen ist, dass $\sqrt{2}$ nicht rational ist, dann gibt es für $\sqrt{2}$ KEINE Bruchschreibweise, keine exakte Dezimalschreibweise mehr. Jede endliche Näherung ist, weil eben endlich, auch schon ungenau - wenn auch vielleicht sehr nah dran. Daraus folgt ganz prinzipiell (auch für die schlauesten MathematikerInnen): Es gibt keine Chance, den Zahlenwert von $\sqrt{2}$ jemals ganz zu sehen.
>
> Das einzige, was wir über $\sqrt{2}$ mit absoluter Sicherheit wissen und jemals wissen werden, ist und bleibt:
> $\sqrt{2}$ ist diejenige (positive) Zahl, die mit sich selbst malgenommen (quadriert) 2 ergibt.
>
> Der Ausdruck $\sqrt{2}$ ist somit *keine Aufforderung mehr zum Ausrechnen*, sondern eine „fertige" Zahldarstellung – auch wenn das gewöhnungsbedürftig ist.

4.7 Potenzen – ein weiteres Beispiel für das Permanenzprinzip

Permanenzprinzip (kurz):
Bei Erweiterungen sollen die bisher geltenden Rechengesetze Gültigkeit behalten.

Potenzen mit natürlichen Exponenten n

Definition als n-fache Multiplikation der Basis mit sich selbst:

$$a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2: \quad a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$$

Die Potenzgesetze (für Potenzen mit natürlichen Exponenten) lassen sich aus dieser Definition unmittelbar herleiten:

$$a^n \cdot b^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ Faktoren}} = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b)}_{n \text{ Faktoren}} = (a \cdot b)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ Faktoren}}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ Faktoren}}} = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{n \text{ Faktoren}} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \qquad (\text{für } b \neq 0$$

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}}_{m+n \text{ Faktoren}} = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{m \text{ Faktoren}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}} \overset{\text{Kürzen}}{=} \left\{ \begin{array}{cl} a^{m-n} & \text{für } m > n \\ 1 & \text{für } m = n \\ \frac{1}{a^{n-m}} & \text{für } m < n \end{array} \right\}$$

[6] http://www.stauff.de/

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n \text{ Faktoren}} = \underbrace{\overbrace{(a \cdot \ldots \cdot a)}^{m \text{ Faktoren}} \cdot \ldots \cdot \overbrace{(a \cdot \ldots \cdot a)}^{m \text{ Faktoren}}}_{n \text{ Klammern}} = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{m \cdot n \text{ Faktoren}} = a^{m \cdot n}$$

Weiterhin folgt als Spezialfall bzw. direkt aus der Definition:

$$a^m \cdot a^1 = a^{m+1} \quad \text{und} \quad a^m \cdot a = a^{m+1}.$$

Daher muss – damit Gleichungen *eindeutig* lösbar bleiben – festgelegt werden:

$$a^1 := a.$$

Sollen die Rechenregeln auch für die Null im Exponenten gelten und die Eins neutrales Element bezüglich der Multiplikation sein, so folgt daraus:

$$a^m \cdot a^0 = a^{m+0} = a^m \quad \text{und} \quad a^m \cdot 1 = a^m.$$

Damit Gleichungen eindeutig lösbar bleiben, muss also festgelegt werden:

$$a^0 := 1.$$

Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

Es sei $n \in \mathbb{N}$ (einschließlich der Null) und $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Wir leiten aus der geforderten Gültigkeit der oben hergeleiteten Rechenregeln für den erweiterten Bereich ab:

$$a^n \cdot a^{-n} = a^{n-n} = a^0 = 1 \quad \text{und} \quad a^n \cdot \tfrac{1}{a^n} = \tfrac{a^n}{a^n} = 1.$$

Da Gleichungen eindeutig lösbar bleiben sollen, muss festgelegt werden:

$$a^{-n} := \tfrac{1}{a^n}.$$

Damit vereinfacht sich der Quotient zweier Potenzen mit gleicher Basis zu:

$$\tfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Potenzen mit rationalen Exponenten

Es sei $a \in \mathbb{R}, a > 0$.

Die bisherigen Rechengesetze sollen weiterhin unverändert erhalten bleiben (Permanenzprinzip):

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n} \cdot n} = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a.$$

- Daraus folgt, dass $a^{\frac{1}{n}}$ als reelle Lösung der Gleichung $x^n = a$ definiert werden sollte.
- Da man aber die einzige reelle Lösung dieser Gleichung, nämlich $x = \sqrt[n]{a}$, bereits kennt, muss man definieren:

$$a^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a}.$$

Potenzen mit reellen Exponenten

Potenzen mit irrationalen Exponenten lassen sich über Intervallschachtelungen definieren, mitunter wird dies zumindest ansatzweise thematisiert.

Potenzen mit irrationalen Exponenten

Berechnet man mit dem Taschenrechner $2^{\sqrt{2}}$, so zeigt dieser 2,665144143 an.

Wie lässt sich dieser Wert erklären?

Jede irrationale Zahl wie $\sqrt{2}$ kann man auf beliebig viele Nachkommastellen bestimmen. Damit kann man einem Term wie $2^{\sqrt{2}}$ folgendermaßen einen Wert zuordnen:

$1 < \sqrt{2} < 2$	$2^1 < 2^{\sqrt{2}} < 2^2$	$2 < 2^{\sqrt{2}} < 4$
$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$	$2^{1,4} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,5}$	$2{,}639015\ldots < 2^{\sqrt{2}} < 2{,}828427\ldots$
$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$	$2^{1,41} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,42}$	$2{,}657371\ldots < 2^{\sqrt{2}} < 2{,}675855\ldots$
$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$	$2^{1,414} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,415}$	$2{,}664749\ldots < 2^{\sqrt{2}} < 2{,}666597\ldots$
…	…	…

Auf diese Weise kann man bei positiver Basis a für jeden irrationalen Exponenten x die Potenz a^x auf beliebig viele Nachkommastellen bestimmen.

Alle Potenzrechengesetze für rationale Exponenten gelten auch für irrationale und damit für alle reellen Exponenten.

Aus Lambacher/Schweizer 9

Potenzen mit ganzzahligen Exponenten – Umsetzung mittels Permanenzreihe

Wir beobachten eine Hefekultur, deren Größe sich jede Stunde verdoppelt. Nach einer Stunde nimmt die Kultur eine Fläche von 2 cm^2 ein, nach zwei Stunden 4 cm^2 usw.[7]

$$\xrightarrow{+1}\;\xrightarrow{+1}\;\xrightarrow{+1}\;\xrightarrow{+1}\;\xrightarrow{+1}$$

Zeitpunkt der Beobachtung (in h)	1	2	3	4	5	6	...	t
Größe der Kultur (in cm^3)	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	...	2^t

$$\xrightarrow{\cdot 2}\;\xrightarrow{\cdot 2}\;\xrightarrow{\cdot 2}\;\xrightarrow{\cdot 2}\;\xrightarrow{\cdot 2}$$

Nach beispielsweise 10 Stunden beträgt die Größe der Kultur dann $2^{10} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2}_{\text{10 Faktoren}} = 1024$.

Wie groß war die Hefekultur *vor dem Beginn der Beobachtung*?
Wir setzen die *Permanenzreihe rückwärts* für $t < 1$ fort:

$$\xleftarrow{-1}\quad\xleftarrow{-1}\quad\xleftarrow{-1}\;\xleftarrow{-1}$$

Zeitpunkt der Beobachtung (in h)	...	-3	-2	-1	0	1	...	t
Größe der Kultur (in cm^3)	...	$\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2^1}$	1	2^1	...	2^t

$$\xleftarrow{:2}\quad\xleftarrow{:2}\quad\xleftarrow{:2}\;\xleftarrow{:2}$$

Sinnvoll wäre zugleich die folgende Fortsetzung der letzten Permanenzreihe:

Zeitpunkt der Beobachtung (in h)	...	-3	-2	-1	0	1	...	t
Größe der Kultur (in cm^3)	...	2^{-3}	2^{-2}	2^{-1}	2^0	2^1	...	2^t

Wir legen daher fest:

$$a^0 = 1 \quad \text{und} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

[7] Nach Elemente der Mathematik 9