Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
A. Filler

Sommersemester 2020

Zusammenfassende Notizen zu der Vorlesung

Didaktik der Algebra und Zahlentheorie

5 Elemente der Didaktik der elementaren Algebra

Literaturempfehlungen:

- VOLLRATH, H.-J.; WEIGAND, H.-G.: *Algebra in der Sekundarstufe*. Heidelberg, 2006 (3. Aufl.).
- MALLE, G.: *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Braunschweig, 1993.

5.1 *Algebra* – Begriffsbestimmung und historischer Exkurs

Brockhaus: *Algebra [arabisch] die, Teilgebiet der Mathematik, im klassischen Sinn die Lehre von den Lösungsmethoden* ***algebraischer Gleichungen.*** *… In der modernen Mathematik versteht man unter Algebra die Untersuchungen* ***algebraischer Strukturen*** *wie Gruppe, Ring, Körper und ihrer Verknüpfungen. …*

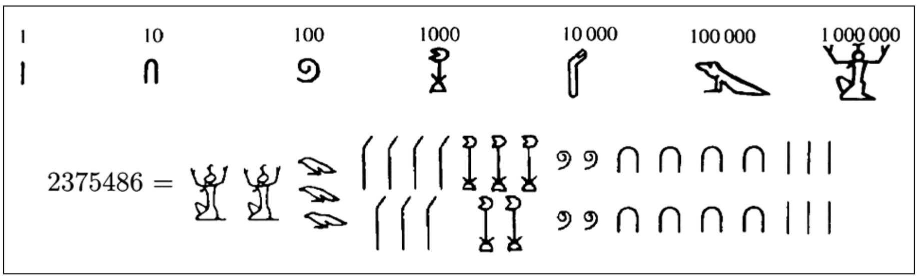
Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG, 2002

Etwas detaillierter:

- ***elementare Algebra*** – Algebra im Sinne der Schulmathematik. Sie umfasst die Rechenregeln der natürlichen, ganzen, gebrochenen und reellen Zahlen, den Umgang mit Ausdrücken, die Variablen enthalten, und Wege zur Lösung einfacher algebraischer Gleichungen.
- ***klassische Algebra*** – Lösen allgemeiner algebraischer Gleichungen über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Zentrales Resultat: Fundamentalsatz der Algebra (jedes nichtkonstante Polynom n-ten Grades kann in n Linearfaktoren mit komplexen Koeffizienten zerlegt werden).
- ***lineare Algebra*** – behandelt das Lösen linearer Gleichungssysteme, die Untersuchung von Vektorräumen ...; Grundlage für die analytische Geometrie.
- ***abstrakte Algebra*** – Grundlagendisziplin der modernen Mathematik; beschäftigt sich mit algebraischen Strukturen wie Gruppen, Ringe, Körper ... .

5.1.1 Historisches zur elementaren Algebra

- Der Beschäftigung mit Algebra gingen Zählen und Rechnen (also „Arithmetik“ voraus.
- Im alten Ägypten ist erstmals „elementare Algebra“ nachweisbar, die ältesten überlieferten Schriften stammen von ca. 2000 v. Chr..
- Zahlensystem im alten Ägypten: „Dezimalsystem“



„Primitive Algebra“im alten Ägypten

Lösen linearer Gleichungen: *Methode des falschen Ansatzes*

$$a \cdot x = c \qquad (a \in \mathbb{Q}^+,\ c \in \mathbb{N})$$

- „Geeignete“Zahl x_1 wählen und in die Gleichung einsetzen: $a \cdot x_1 = c_1$
  (x_1 muss so gewählt werden, dass sich eine natürliche Zahl c_1 ergibt.)
- Um die richtige Lösung zu finden, muss gelten: $\dfrac{x}{x_1} = \dfrac{c}{c_1}$, also $x = x_1 \cdot \dfrac{c}{c_1}$.

Lösen (rein) quadratischer Gleichungen

- Gegeben: zwei Quadrate mit den Seiten x und y wobei $y = \frac{3}{4}x$ sowie mit $x^2 + y^2 = 100$.
- Gesucht sind x und y.

Methode des einfachen falschen Ansatzes:

- Nimm ein Quadrat mit Seite 1 und nimm $\frac{3}{4}$ von 1 (das ist $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$) als Seite der anderen Fläche.
- Multipliziere $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ mit sich selbst, das ergibt $\frac{1}{2} + \frac{1}{16}$.
- Wenn also die Seite der einen Fläche als 1, die der anderen als $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ angenommen ist, addiere man die beiden Flächen.
- Ergebnis: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16}$. Ziehe daraus die Wurzel, das ist $1 + \frac{1}{4}$.
- Ziehe die Wurzel aus der gegebenen Zahl 100, das ist 10.
- Wie oft geht $1 + \frac{1}{4}$ in 10 auf? Es geht 8 mal.

  (Die Ägypter kannten bereits den Begriff „Wurzel“, allerdings nur für Zahlen, deren Quadrat als Quadrat einer rationalen Zahl gegeben ist.)

Etwas „moderner“aufgeschrieben:

- $100 = x^2 + y^2 = x^2 + \left(\frac{3}{4}x\right)^2 = \frac{25}{16}x^2;$
- Sei $x = 1$, dann ist $\frac{25}{16}x^2 = \frac{25}{16}$, aber $\frac{25}{16}x^2$ soll 100 ergeben, also $\frac{5}{4}x = 10$.
- Somit ist $x = 8\,;\ y = 6$.

  siehe: Alten, H.-W., Djafari-Naini, A., Folkerts, M., Schlosser, H., Schlote, K.-H., Wussing, H.: *4000 Jahre Algebra - Geschichte, Kulturen, Menschen*. Springer, 2003.

5.1.2 Entwicklung des Schulunterrichts in Algebra

Der Unterricht in Algebra bis zum Ende des 19. Jahrhunderts

- Ein großer Teil der heute gebräuchlichen mathematischen Symbolik geht auf **Leonard Euler** (1707-1783) zurück. Größten Einfluss auf den Schulunterricht in Algebra hatte sein Buch „***Vollständige Anleitung zur Algebra***"(1770).
- Enthält u. a. Grundlegung des Zahlenrechnens, Rechnen „mit den zusammengesetzten Größen"(Termumformungen u. a.), Verhältnisse, Verhältnisgleichungen, Gleichungen.
- Einführung von Variablen: *„Wenn nun, um die Sache allgemein zu machen, anstatt der wirklichen Zahlen Buchstaben gebraucht werden, so begreift man auch leicht die Bedeutung, wie z. B.: a – b – c + d – e deutet an, daß die durch die Buchstaben a und d ausgedrückten Zahlen addirt und davon die übrigen b, c, e, welche das Zeichen – haben, sämtlich abgezogen werden müssen.“*
- Die Behandlung von Gleichungen wird eingeleitet durch die Hinweise:

  „Der Hauptzweck der Algebra sowie aller Theile der Mathematik besteht darin, den Werth solcher Größen zu bestimmen, die bisher unbekannt gewesen, was aus genauer Erwägung der Bedingungen geschieht. Daher wird die Algebra auch als die Wissenschaft definirt, welche zeigt, wie man aus bekannten Größen unbekannte findet.

  Bei jeder vorkommenden Aufgabe wird nun diejenige Zahl, die gesucht werden soll, durch einen der letzten Buchstaben des Alphabets bezeichnet, und alsdann werden alle vorgeschriebenen Bedingungen in Erwägung gezogen, durch welche eine Gleichheit zweier Werthe dargestellt wird. Aus einer solchen Gleichung muß sodann der Werth der gesuchten Zahl bestimmt werden, wodurch die Aufgabe aufgelöst wird. Bisweilen müssen auch mehrere Zahlen gesucht werden, was in gleicher Weise durch Gleichungen geschehen muß.“
- Der Mathematikunterricht blieb (hinsichtlich der Behandlung der Algebra) bis zum Ende des 19. Jahrhunderts bei dem von Euler vorgegebenen Aufbau.

Erste Hälfte des 20. Jahrhunderts (Meraner Reformen)

- Ende des 19. / Anfang des 20. Jahrhunderts: grundlegende Reform des Mathematikunterrichts (großen Einfluss hatte Felix Klein, 1849-1925, erster Vorsitzender der IMUK).
- Aus den ***Reformvorschlägen der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte*** (Meran, 1905):

  „Einmal gilt es ..., den Lehrgang mehr als bisher dem natürlichen Gange der geistigen Entwicklung anzupassen ..., die neuen Kenntnisse mit dem vorhandenen Wissen in organische Verbindung zu setzen, endlich den Zusammenhang des Wissens in sich und mit dem übrigen Bildungsstoff der Schule von Stufe zu Stufe mehr und mehr zu einem bewußten zu machen. ... Von hier aus entspringen zwei Sonderaufgaben: ... und die Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens. Die von je dem mathematischen Unterricht zugewiesene Aufgabe der logischen Schulung bleibt dabei unbeeinträchtigt."

Hauptimpulse für die Algebra (diese wirken bis heute):

- Der **Funktionsbegriff** wurde zu einem Leitbegriff, der Problemstellungen und Lösungsverfahren lieferte. Gleichungen ergeben sich z. B. bei der Suche nach Nullstellen von Funktionen. Diese können mithilfe der grafischen Darstellungen von Funktionen grafisch gelöst werden. Potenzen werden in Verbindung mit Potenzfunktionen behandelt.
- Der Funktionsbegriff ermöglicht eine **enge Verbindung zwischen Algebra und Geometrie**. Die grafischen Darstellungen von Funktionen führen auf geometrische Objekte. Geometrische Eigenschaften von Kurven, wie z. B. ihre Symmetrien, können als Funktionseigenschaften algebraisch begründet werden.
- Diese Ideen setzten sich im MU in den 20-er bis 40-er Jahren des 20. Jahrhunderts durch (nach den Meraner Lehrplänen).

1950 – 1980

- Fachwissenschaftliche Entwicklung der Algebra in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts: Theorie der algebraischen Strukturen (Gruppen, Ringe, Körper, Vektorräume, ...).
- In den 60-er Jahren begann eine „Revolution" des MU, vor allem in Frankreich und Belgien (Bourbaki, Dieudonne, Papy, Choquet, ...)
- OECD-Konferenz 1959 über „New Thinking in Mathematics" forderte für den Algebraunterricht die Behandlung von Gruppen, Ringen, Körpern und Vektorräumen und eine axiomatische Begründung der Zahlbereiche.

Reformen in der Bundesrepublik nach 1968 brachten u. a.:

- Betonung der Regeln in den Zahlbereichen (bis hin zur Axiomatik),
- Betrachtung neuer Verknüpfungen in den Zahlbereichen,
- Erarbeitung von Strukturbegriffen, wie Gruppe, Ring, Körper, Vektorraum,
- Neugestaltung der Lehre von den Termen, Gleichungen und Ungleichungen mit den Begriffen der Mengenlehre und der Logik.
- Mitte der siebziger Jahre setzte – in Anbetracht der langsam sichtbar werdenden niederschmetternden Ergebnisse – eine Gegenbewegung ein.

Von Morris Kline geschilderte Episode „*Why Johnny Can't Add*":

„Ein Vater fragte seinen achtjährigen Jungen: ‚Wieviel ist $5 + 3$?' und bekam zur Antwort, dass nach dem Kommutativgesetz $5 + 3 = 3 + 5$ sei. Etwas in Verwirrung geraten, wiederholt der Vater seine Frage in etwas anderer Form: ‚Aber wieviele Äpfel sind 5 Äpfel und 3 Äpfel?' Das Kind verstand nicht recht, dass ‚und' ‚plus' bedeutet und fragte: ‚Meinst Du 5 Äpfel plus 3 Äpfel?' Der Vater beeilte sich, dies zu bejahen und wartete gespannt auf die Antwort. ‚Ach', meint der Sohn, das spielt gar keine Rolle, ob Du Äpfel, Birnen oder Bücher meinst, $5 + 3 = 3 + 5$ stimmt immer."

5.2 Überblick: Grundlegende Probleme der Schulalgebra

- Defizite in *Algebraisierung von Sachverhalten*
- fehlende *Verknüpfungen zwischen Variablen, Rechenregeln und der Bedeutung dahinter*
- defizitäre Kenntnisse in *algebraischen Umformungen*
- fehlende Antworten auf die *Sinnfrage*

> „Algebraunterricht [setzt] häufig sehr unvermittelt ein, vor allem dann, wenn er lapidar Zahlen durch Variable ersetzt und mit diesen angeblich ‚wie mit Zahlen' nach den Grund- gesetzen der Arithmetik operiert. Zugrunde liegt oft die trügerische Erwartung, die in Bezug auf das Ziffernrechnen erworbenen Formalisierungsfähigkeiten, die in den ersten vier Schuljahren sorgfältig aufgebaut werden, müssten ausreichen, um auch das Rechnen selbst unter formalen Aspekten betrachten zu können."
>
> (Lisa Hefendehl-Hebecker, 1992)

5.3 Propädeutik der elementaren Algebra (Grundschule)

- Arbeiten mit Platzhaltern
- Lösen einfacher Gleichungen (und auch Ungleichungen) mit Platzhaltern
- Beispiele: $36 + \square = 50$; $15 \cdot \square = 75$
- Strategien: Probieren, Anwenden von Umkehroperationen (ohne Lösungskalküle)
- Inhaltliches und versuchsweises Lösen einfacher Gleichungen, auch in Sachkontexten

Lösen von Gleichungen durch Tabellen

Setze in die Gleichung $2x + 3 = 11$ *der Reihe nach alle natürlichen Zahlen von* 0 *bis* 10 *ein. Wann ergibt sich eine wahre Aussage?*

Lösung mithilfe einer Tabelle:

- Für $x = 4$ erhalten wir eine wahre Aussage.
- Eindeutigkeit der Lösung: Setzen wir für x eine Zahl kleiner als 4, so ist $2x + 3 < 11$, setzen wir für x eine Zahl größer als 4, so ist $2x + 3 > 11$.

x	2x+3
0	3
1	5
2	7
3	9
4	11
5	13
...	...

Das Lösen von Gleichungen durch systematisches Probieren und durch die Verwendung von Tabellen sollten wichtige Strategien bleiben, auch nachdem Lösungskalküle behandelt wurden.

5.4 Veränderung von Bedeutungen und Sichtweisen beim Übergang von der Arithmetik zur Algebra

Dieselben Schreib- und Sprechweisen werden in der Algebra teilweise anders gebraucht als beim reinen Rechnen mit Zahlen.

- So bedeutet $4\frac{3}{4}$ zunächst $4 + \frac{3}{4}$, es könnte aber später auch (wie z. B. $4x$) als $4 \cdot \frac{3}{4}$ ausgelegt werden; auf das Operationszeichen ist hier besonders zu achten.
- $4x$ bzw. $4\square$ bedeutet in der Arithmetik zunächst, dass der Platzhalter x bzw. $\square$ für eine Ziffer steht, also $4\square = 10 \cdot 4 + \square$. Später ist damit natürlich $4 \cdot x$ bzw. $4 \cdot \square$ gemeint.
- Operationszeichen wie „+" werden in der Arithmetik zunächst als „Handlungsanweisungen" aufgefasst, z. B. bei $3 + 9$: addiere 3 und 9. In der Algebra steht ein Term wie $x + 3$ für eine unbestimmte Zahl. Man operiert damit weiter. „Wie kann ich mit $x + 3$ rechnen, wenn ich x nicht kenne?"
- Das *Gleichheitszeichen* hat in der Grundschule vor allem eine einseitige Bedeutung: einer Aufgabe wird ihre Lösung zugewiesen. In der Algebra hat es mehrere Bedeutungen:

- „=“ im Sinne numerischer Gleichheit, also als Beziehungszeichen bzw. Vergleichszeichen – lesbar in beide Richtungen.
- „=“ im Sinne von „:=“, d. h. einer Variablen wird ein Wert zugewiesen wie $x := 3$.
- Außerdem hat „=“ am Ende des Lösungsprozesses einer Gleichung auch noch die aus der Arithmetik bekannte Bedeutung (im Sinne von „Ausrechnen“).

In der Algebra gewinnen zudem *geschlossene Darstellungen von „Rechnungen“* an Bedeutung; im Zusammenhang damit sind u. a. Klammern wichtig. Dies bringt Notationsprobleme mit sich, vor allem Probleme mit der Klammersetzung und Klammereinsparung (bzw. mit Bindungskonventionen wie Punktrechnung vor Strichrechnung).

Zum Beleg führe ich eine wahre Begebenheit an. Vor kurzem besuchte ich eine Zirkusvorstellung, in der ein **rechnender Pudel** vorgestellt wurde. Der Pudel wählte jeweils aus einer Menge von Karten jene Karte aus, die mit dem Resultat der gestellten Rechnung beschriftet war. Das Publikum wurde aufgefordert, eine „komplizierte“ Rechnung anzusagen. Diese wurde auf eine Tafel geschrieben:

$$5 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 2$$

Dann wurde das Publikum zum gemeinsamen Ausrechnen aufgerufen. Das ganze Zirkuszelt brüllte: 5 plus 2 ist 7, mal 3 ist 21, plus 4 ist 25, mal 2 ist 50.

Die Zeile auf der Tafel wurde ergänzt zu:

$$5 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 50$$

Aus MALLE, G.: *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Braunschweig: Vieweg, 1993, S. 143.

5.5 Variablen

- Variablen sind nicht nur in der Mathematik von Bedeutung;
- treten auch in der Umgangssprache auf z. B. „Ding“, „Sache“, „ein“, „irgendwelche“ usw.;

5.5.1 Aspekte von Variablen (nach Malle)

Gegenstandsaspekt

- Variable als unbekannte oder nicht näher bestimmte Zahl (allgemeiner: als unbekannter oder nicht näher bestimmter Denkgegenstand[1]).
- Beispiel: Zahlenrätsel: *Denke dir eine Zahl. Addiere* 10. *Verdopple das Ergebnis. Subtrahiere das Doppelte der ursprünglichen Zahl. Du erhältst* 20 *– egal, welche Zahl du gedacht hast.*

  Mögliche Lösung: Ist x die gedachte Zahl, dann gilt $2 \cdot (x + 10) - 2x = 2x + 20 - 2x = 20$.

Einsetzungsaspekt

- Allgemein: In Variablen können konkrete Realisierungen („Instanzen“) der durch sie beschriebenen Denkgegenstände eingesetzt werden.
- Schulbezogener: Variable als Platzhalter für Zahlen bzw. Leerstelle, in die man Zahlen (genauer: Zahlnamen) einsetzen darf.
- Beispiel (siehe auch das obige Beispiel zum Lösen von Gleichungen mit Tabellen):

  Setze in die Gleichung $2x + 3 = 11$ *der Reihe nach die Zahlen von* 1 *bis* 6 *ein! Wann ergibt sich eine wahre Aussage?*

$2 \cdot 1 + 3 = 11$	f	$2 \cdot 4 + 3 = 11$	w
$2 \cdot 2 + 3 = 11$	f	$2 \cdot 5 + 3 = 11$	f
$2 \cdot 3 + 3 = 11$	f	$2 \cdot 6 + 3 = 11$	f

[1]Denkgegenstand: abstrahierter, idealisierter Gegenstand unserer Anschauung. Dabei werden bestimmte Eigenschaften als wesentlich, d. h. den Gegenstand definierend festgelegt, andere vernachlässigt. Die Beispiele für Denkgegenstände, die als Variablen auftreten können, sind vielfältig, z. B. „natürliche Zahl“, „Dreieck“, „Funktion“, „Wort (Zeichenfolge)“, „Formatvorlage“.

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ (x im *Simultanaspekt* für den Bereich $\mathbb{R}$, d. h. x steht für beliebige Zahlen aus einem Bereich, die alle gleichzeitig repräsentiert werden).
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ (x im *Veränderlichenaspekt* für den Bereich $\mathbb{R}$, d. h. x wird als Veränderliche aufgefasst, die alle Zahlen aus einem Bereich „nacheinander durchläuft").

Kalkülaspekt (Rechenaspekt)

- Denkgegenstände lassen sich mit Hilfe von Relationen und Operationen verknüpfen und vergleichen (z. B. Gleichheitsrelation; Addition nat. Zahlen, Division reeller Zahlen, Addition von Funktionen, ...).
- Mit Variablen als Symbolen für Denkgegenstände kann man mit den jeweils für die Denkgegenstände erlaubten (definierten) Operationen und Relationen formal operieren und sie abstrakt analysieren.
- Nach Malle: Variable als bedeutungsloses Zeichen, mit dem nach bestimmten Regeln operiert werden darf.
- Derartige Regeln sind z. B. die Rechengesetze bei Termumformungen sowie erlaubte Äquivalenzumfomrungen von Gleichungen.
- *Beispiel: Löse die Gleichung* $3x + 8 = 26$.

$$\begin{array}{lcll} 3x+8 & = & 26 & \mid -8 \\ 3x & = & 18 & \mid :3 \\ x & = & 6 & \end{array}$$

Die drei Aspekte sind eng miteinander verbunden. Man kann bei verschiedenen Aufgaben zwei oder drei dieser Aspekte anwenden, wobei sich einer der Aspekte stärker betonen lässt.

Beispiel: $m = \dfrac{x+y}{2}$ (Mittelwert m zweier Zahlen x und y)

- Man denkt vermutlich an nicht näher bestimmte Zahlen, betont also den *Gegenstandsaspekt*.
- Setzt man anschließend für x und y Zahlen ein, um verschiedene Mittelwerte auszurechnen, betont man eher den *Einsetzungsaspekt*.
- Formt man die Formel um, etwa zu $x = 2m - y$, wendet man einfach gewisse Regeln an und betont damit den *Kalkülaspekt*.

Auch bei dem folgenden Beipiel treten alle drei Aspekte auf:

Gaußsche Summenformel

$$1+2+3+4+\cdots+n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$$

Beweis mittels vollständiger Induktion:

Induktionsanfang: $\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$

Im Induktionsschritt ist zu zeigen, dass für beliebige $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ aus der
Induktionsvoraussetzung: $\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$
die Induktionsbehauptung: $\sum_{k=1}^{n+1} k = 1+2+\cdots+n+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$
folgt. Dies gelingt folgendermaßen:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

- Ordnen Sie den Aussagen, Überlegungen und Beweisschritten dieses Beispiels Variablenaspekte zu. Lassen sich beiden auftretenden Variablen alle drei Aspekte zuordnen?
- Lösen Sie die Gleichung $3x + 2 = 11$ auf drei verschiedene Weisen, bei denen (a) der Gegenstandsaspekt, (b) der Einsetzungsaspekt und (c) der Kalkülaspekt im Vordergrund steht.

5.5.2 Kontexte, in denen Variablen benutzt werden

- Variablen als *unbestimmte* Zahlen in Termen, z. B. $t^3 + 2t^2 + t$
- in *funktionalen Zusammenhängen* zwischen Zahlen, z. B. $y = x^2 + 5$, $y = \sin(x)$
- als *Unbekannte* in Gleichungen („Lösungsvariablen"), z. B. $2x + 5 = 17$
- zum Ausdruck *allgemeingültiger Gesetze*, z. B. $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$
- als *gebundene Variablen*, für die keine Einsetzungen erlaubt sind, z. B. $\int_0^1 f(x)dx$
- als *mit Wert belegte Konstanten*, z. B. π in πr^2
- als nicht bestimmte *Konstanten bzw. Parameter*, z. B. in $y = ax^2 + bx + c$, $y = \sin(ax)$

5.5.3 Zusammenfassung; Folgerungen für den Unterricht

Fazit von G. Malle (1991):

- Anfangs Betonung des Gegenstandsaspekts, Objektsprache („Bestimme eine Zahl x mit $x + 5 = 12$.")
- Einsetzungsaspekt
- erst später Kalkülaspekt, Metasprache („Löse die Gleichung!")

L. Hefendehl-Hebecker (zit. nach Diss. D. Melzig, 2013):

> „Zahldarstellungssysteme beschreiben und systematisieren ursprünglich Erfahrungen mit Gegenständen (Zählen, Bündeln), algebraische Formeln indessen beschreiben und systematisieren Erfahrungen mit Zahlen (Rechengesetze, Lösungsverfahren)."

$\rightsquigarrow$ Einstieg in die elementare Algebra in zwei Schritten:

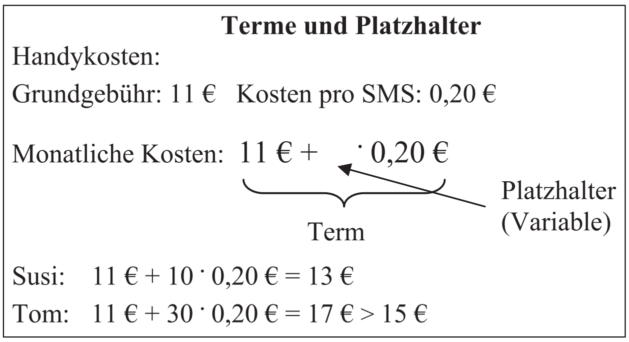
- Gelegenheiten bieten, Erfahrungen mit Zahlen zu sammeln, die dazu anregen, Muster und Strukturen zu erkennen und zu beschreiben,
- diese „Erfahrungen behutsam reflektieren, ordnen, systematisieren, formalisieren und dabei in erforderlichem Maße neue gedankliche Objekte wie Variable konzipieren".

5.6 Einige Aufgaben zur Arbeit mit Variablen und Termen

5.6.1 Beispiel für einen Einstieg in das Stoffgebiet Terme

Die folgende Aufgabe diente als Einstieg in die Behandlung von Termen (Klasse 6, Realschule):[2]

> Bei einem Telefonanbieter sind für einen Handyvertrag 11 € monatliche Grundgebühr und für jede SMS 0,20 € zu bezahlen.
>
> - Susi hat in einem Monat 10 SMS verschickt. Wie viel muss sie bezahlen?
> - Reicht Toms Taschengeld (15 € im Monat), um 30 SMS zu verschicken?



Im Unterrichtsgespräch wird nebenstehendes Tafelbild entwickelt.

Anhand dieses Beispiels:

- Diskussion der Begriffe Term, Platzhalter, Variable;
- Bearbeitung eines weiteren Beispiels;
- Erarbeitung eines Merksatzes als Lückentext und Besprechung:

[2]Derartige Mobilfunktarife sind inzwischen kaum noch zu finden, weshalb man wohl auf andere Beispiele für feste und mengenabhängige Gebühren zurückgreifen muss, z. B. Grundgebühren und Preise pro kWh bei „Stromanbietern".

Terme sind *Rechenausdrücke*, in denen *Zahlen, Platzhalter (Variable)* und *Operationszeichen* vorkommen können. Als Variable können *Buchstaben* verwendet werden, aber auch *Zeichen / Symbole* wie z. B. Vierecke und Kreise.

5.6.2 Aufgaben, bei denen der Gegenstandsaspekt im Vordergrund steht

Zahlentrick: *Denke dir eine Zahl, schreibe sie auf. Addiere 3. Verdopple das Ergebnis. Subtrahiere 4. Halbiere das Ergebnis. Subtrahiere die ursprünglich gedachte Zahl. Welche Zahl erhältst du?*

denke dir eine Zahl	□
addiere 3	□●●●
verdopple das Ergebnis	□●●● □●●●
subtrahiere 4	□□●●
halbiere	□●
subtrahiere die gedachte Zahl	●

Ein Schüler denkt sich eine Zahl und führt folgenden Zahlentrick aus:

- *Verdopple die Zahl, addiere zum Ergebnis 5, verdreifache das neue Ergebnis, subtrahiere das Sechsfache der gedachten Zahl.*

  Welches Ergebnis bekommt jeder Schüler heraus?

Erraten einer gedachten Zahl:

- *Denke dir eine Zahl. Addiere die um 3 größere Zahl, multipliziere das Ergebnis mit 5, subtrahiere 15. Wenn du mir dein Ergebnis sagst, sage ich dir, welche Zahl du dir gedacht hast.*

  Welche Operation muss ich am Ende durchführen, um die gedachte Zahl zu finden?

Ziffernrätsel:

- *Links soll die gleiche Zahl stehen wie rechts:* $9 + \clubsuit = 25 - \clubsuit$. Für welche Zahl steht $\clubsuit$?

5.6.3 Einsetzungsaspekt: Arbeit mit Tabellen

„Termwettrennen“:

Wann überholen die Zahlen des Ausdrucks $x \cdot x$ *die Zahlen des Ausdrucks* $x + 30$?

x	$x + 30$	$x \cdot x$
1	31	1
2	32	4
3	33	?
...	...	...

→ Die Schüler gewinnen Erfahrung im Umgang mit Tabellen, im Einsetzen von Zahlen in Variablen, sie werden an eine dynamische Sichtweise herangeführt, sie gewinnen Vorerfahrungen zu Termen und Gleichungen.

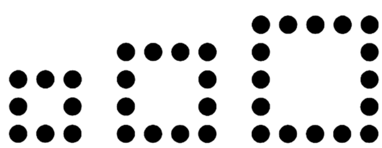
→ Eine erweiterte Vorstellung des Variablenbegriffs wird angebahnt: Die Variable x wird als *Veränderliche* gesehen, die einen ganzen Bereich durchläuft.

(Hier steht der Einsetzungsaspekt von Variablen und dabei insbesondere der Veränderlichenaspekt im Vordergrund.)

5.6.4 Aufstellen von Termen

Beispiel 1 (Gegenstandsvorstellung):

Schaut euch die folgende Reihe aus regelmäßig wachsenden Plättchenmustern genau an und versucht, sie fortzusetzen:[a]



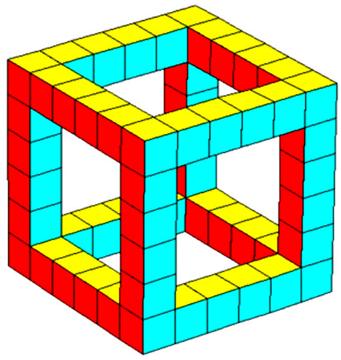
[a]nach Jürgen Roth (Universität Koblenz-Landau)

- Gebt jeweils die Gesamtzahl der Plättchen im Muster an.
- Stellt einen allgemeinen Term auf, mit dem man die Gesamtzahl der Plättchen bestimmen kann (ohne alle Plättchen zu zählen).

Bemerkung: Mit „Gegenstand“ sind hier nicht die Plättchen gemeint, *Denkgegenstand* ist die *Anzahl* der Plättchen einer Seite.

Beispiel 2 („n-Würfel“):[3]

- Aus wie vielen kleinen Würfeln besteht ein Würfel der längs einer Kante aus n kleinen Würfeln zusammengesetzt ist?
- Stellen Sie möglichst viele verschiedene Zählterme auf, und zeigen Sie die Äquivalenz dieser Terme.
- Wie viele Kanten der kleinen Würfel sind beim n-Würfel sichtbar? (Kanten, an denen zwei oder mehr Würfel zusammenstoßen, werden nur einmal gezählt.)



Äquivalente Terme:

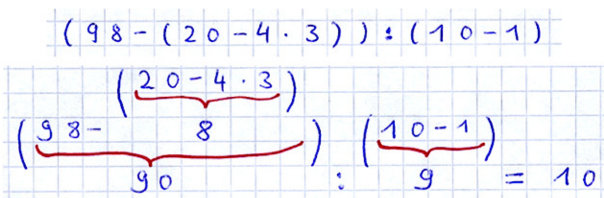
- Einsetzen aller Werte aus dem Grundbereich ergibt dasselbe Ergebnis.
- Erkenntnis anhand geeigneter Aufgaben mit vielen Lösungsmöglichkeiten: Es gibt äquivalente Terme – einfache und komplizierte.
- Gegenstandsaspekt/Einsetzungsaspekt helfen hier nur begrenzt $\rightsquigarrow$ **Kalkülaspekt**

Kraft des Kalküls – weitere Beispiele

- Die Abstände der Quadratzahlen (0, 1, 4, 9, 16, ...) sind die genau die ungeraden natürlichen Zahlen (1, 3, 5, 7,...). Stimmt das?
  - endliche Zahl von Folgengliedern: einfach nachrechnen
  - aber: kein Beweis, dass das für alle Abstände aufeinander folgender Quadrate gilt
  - Variablen helfen ...
- Denke Dir eine beliebige zweistellige Zahl. Zähle dann die zwei Ziffern zusammen und ziehe das Ergebnis von der Zahl ab. Das Ergebnis ...
  ... ist immer durch 9 teilbar.

5.6.5 Zwischenfazit: Termumformungen, Kalkülaspekt

- Variablen sind vielfältig einsetzbar – das sollte im Unterricht abgebildet werden.
- Abstraktion von Zahl zu Variable ist ein großer Sprung. Verankerung der Formelsprache im Umgang mit Zahlen und Größen (Gegenstandsaspekt, Einsetzungsaspekt) ist daher keine „Pflichtübung“, sondern Grundsteinlegung.
- Kalkülaspekt und (erst dort benötigte) Metasprache haben ohne diese Grundsteinlegung zunächst keine Berechtigung ...
  ... und nehmen später berechtigt einen großen Raum ein.
- Termstrukturen erkennen, strukturell analysieren, z. B. mithilfe von „Klammergebirgen“ (Ulrich Kortenkamp)[4]



[3] nach Jürgen Roth (Universität Koblenz-Landau)

[4] siehe z. B. Kortenkamp, U.: Klammergebirge als Strukturierungshilfe in der Algebra: https://cermat.org/sites/default/files/Kortenkamp-KSA-2005a..pdf

- Terme verbalisieren, anschaulich/bildlich deuten[5]
- andere Variablenaspekte nutzen
- Termumformungen kann man in zwei Richtungen lesen: Faktorisieren, Ausklammern.
- Terme in Terme einsetzen
- Sinnvolle „Rechentricks“: $\frac{x+y}{x} = \frac{x}{x} + \frac{y}{x} = 1 + \frac{y}{x}$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy}, \ldots$
- Sinnfrage stellen, Kraft des Kalküls exemplarisch demonstrieren.

5.7 Lösen linearer Gleichungen

Wie Variablen können auch Gleichungen unter verschiedenen Aspekten gesehen werden:

- Gleichung als Beziehung zwischen den Variablen,
- Gleichung als Verpackung der Lösung (Lösen durch Auspacken),
- Gleichung als Schnittstellen der Graphen der linken und der rechten Seite.

In der Didaktik der Algebra gab es lange Debatten über die korrekte Behandlung von Gleichungen. In den 50er- und 60er-Jahren stand der *Gegenstandsaspekt* der Variablen im Vordergrund: Es wurde die Unbekannte gesucht. Das führte zu Problemen bei nicht lösbaren Gleichungen und bei Gleichungen mit mehr als einer Lösung. Deshalb wurde später stärker der *Einsetzungsaspekt* betont. Unter ihm ist es naheliegend, Gleichungen danach einzuteilen, wie sie sich bei Einsetzungen verhalten: Jede Einsetzung macht die Gleichung wahr (allgemeingültig); einige Einsetzungen machen sie wahr (lösbar) oder keine Einsetzung macht sie wahr (unlösbar).

Herangehensweise an die Behandlung von Gleichungen

- Einfache Gleichungen werden durch inhaltliche Überlegungen, Probieren, Nutzen von Umkehroperationen bereits in der Grundschule gelöst (z. B. $36 + \square = 50$);
- systematische Behandlung der Gleichungslehre meist ab Klasse 7/8;
- dabei oft zu schnell Einführung und (mechanische) „Einübung“ der Umformungsregeln.

5.7.1 Inhaltliches Lösen einfacher Gleichungen

- $3 \cdot x = 12$ — Mit welcher Zahl muss ich 3 multiplizieren, um 12 zu erhalten?
- Erkennen von „Gegenaufgaben“ (Umkehroperationen): $5 + x = 7 \Rightarrow x = 7 - 5$; $5 \cdot x = 15 \Rightarrow x = 15 : 5$

Systematisches Probieren sollte auch bei und nach der Einführung der Äquivalenzumformungen zu den Strategien von Schülerinnen und Schülern gehören.

- Fülle die Lücken: *Zu Beginn liegt ____ in Führung aber ______ holt schnell auf. Bei $x =$ __ liegen beide Terme gleichauf. Dann übernimmt ____ die Spitze und gibt sie nicht mehr ab.*
- ○ An der Stelle $x = 5$ holt der Term $3 \cdot x$ den Term $x + 10$ ein.
- ○ $x = 5$ ist also Lösung von $3 \cdot x = x + 10$.

x	$3 \cdot x$	$x+10$
1	3	11
2	6	12
3	9	13
4	12	14
...	...	...

- Suche die Lösung der Gleichung $2 \cdot x + 1 = x + 74$.
- ○ In den Spalten $2 \cdot x + 1$ und $x + 74$ muss dieselbe Zahl stehen.
- ○ Grenze die Möglichkeiten für x planvoll ein, bis du für $2 \cdot x + 1$ und $x + 74$ dieselbe Zahl erhältst.
- → Schüler sollen erkennen: *„Das dauert noch lange! Ich mache einen großen Sprung und probiere $x = 100$.“*

x	$2 \cdot x+1$	$x+74$
1	3	75
2	5	76
3	7	77
4	9	78
5	11	79
...	...	...

[5] z. B. Distributivgesetz, binomische Formeln durch Flächeninhalte, siehe „Ikonisieren“ in der VL Einf. Math.-did./ Did. d. Geom.

Beispiel für die Entwicklung sehr anspruchsvoller Strategien systematischen Probierens

Löse die Gleichung $3{\cdot}x - 5 = x + 45$.

a) Lege eine Tabelle an und setze für x die natürlichen Zahlen von 2 bis 6 ein.

b) In welchen Schritten wachsen die Werte in der Spalte $3{\cdot}x - 5$, in welchen Schritten in der Spalte $x + 45$?

c) In welchen Schritten fallen die Werte in der Spalte „Unterschied“?. Wann wird in dieser Spalte 0 stehen? Wie heißt also die Lösung der Gleichung?

x	$3{\cdot}x - 5$	$x + 45$	Unterschied
2	1	47	46
3	4	48	44
4	7	49	42
5	10	50	40
6	13	51	38
...	...	...	...

- Bei Vorgehensweisen dieser Art kommen *wichtige Aspekte funktionalen Denkens* zum Tragen.
- Funktionale Überlegungen sollten beim Lösen von Gleichungen stets einbezogen werden.
- Damit lassen sich Gleichungen auch *graphisch lösen* (siehe Kapitel 6 zu Funktionen).

5.7.2 Lösen linearer Gleichungen durch Äquivalenzumformungen

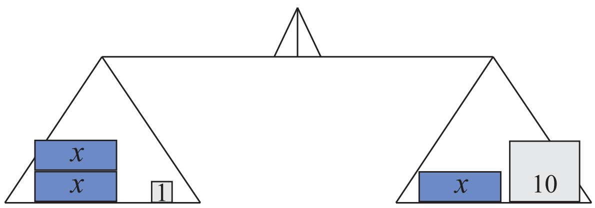
- Umformungen, welche die Lösungsmenge einer Gleichung unverändert lassen, heißen *Äquivalenzumformungen*.
- Durch geeignete Schritte von Äquivalenzumformungen lassen sich lineare Gleichungen lösen (bzw. es stellt sich heraus, dass sie nicht lösbar sind oder unendlich viele Lösungen besitzen):

$$2x - 4 = x + 4 \;\Leftrightarrow\; x - 4 = 4 \;\Leftrightarrow\; x = 8 \;\rightarrow\; \text{eindeutig erfüllbare Gleichung}$$
$$2x - (x - 4) = x + 4 \;\Leftrightarrow\; x + 4 = x + 4 \;\rightarrow\; \text{mehrdeutig erfüllbare Gleichung}$$
$$2x - (x - 7) = x + 5 \;\Leftrightarrow\; x + 7 = x + 5 \;\rightarrow\; \text{unerfüllbare Gleichung}$$

- Schüler lernen *Kalküle*, mit deren Hilfe sie lineare Gleichungen lösen können. Deren sichere Beherrschung setzt verschiedene Fähigkeiten voraus:
  - Wissen, dass die Addition desselben Terms auf beiden Seiten einer Gleichung eine Äquivalenzumformung ist;
  - Wissen, dass Multiplikation mit einer von 0 verschiedenen Zahl auf beiden Seiten einer Gleichung eine Äquivalenzumformung ist;
  - Terme durch äquivalente Terme ersetzten können;
  - Vereinfachungsstrategien für Terme kennen und anwenden können;
  - Beherrschen der Grundrechenarten für rationale Zahlen.
- Beispiel: $2x - 3 \cdot (x - 4) = -4 \cdot x + 8$

Das Modell der Waage

- Gleichungen und Äquivalenzumformungen lassen sich am Waagemodell veranschaulichen.



Schreibe die Gleichung zu dieser Waagestellung auf. Wie schwer ist jedes Paket?

- Sehr einfache Gleichungen können mithilfe der Waage dargestellt werden. Der Lösungsweg entspricht konkreten Handlungen an der Waage. Die (Balken-)Waage kann wirklich benutzt werden oder auch nur als Vorstellungshilfe dienen.

Grundgedanke:

- Eine Waage bleibt im Gleichgewicht, wenn auf beiden Waagschalen dasselbe geschieht.

→ *Ebenso bleibt eine Gleichung bestehen, wenn auf beide Seiten dieselbe Operation angewendet wird.*

Daraus lassen sich **mögliche Umformungsschritte beim Lösen von Gleichungen** begründen:

- Auf beiden Seiten denselben Term addieren oder subtrahieren.
- Beide Seiten mit derselben Zahl (außer 0) multiplizieren oder dividieren.
- Die beiden Seiten der Gleichung vertauschen.

Bemerkungen:

- Die Umformungen nicht an zu einfachen Beispielen wie $2 \cdot x + 3 = 9$ einführen – derartige Gleichungen lösen Schüler im Kopf. Die Umformungsregeln sind vor allem dann notwendig, wenn die *Variable auf beiden Seiten* des Gleichheitszeichens *auftritt*.
- Die „Waageregeln" auch *in umgekehrter Richtung anwenden*.

  Beispiel: Gib 5 Gleichungen an, die alle $x = 3$ als Lösung haben.

$$\begin{aligned} x &= 3 && \mid +5 \\ x+5 &= 8 && \mid \cdot 2 \\ 2\cdot(x+5) &= 16 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x &= 3 && \mid +x \\ 2x &= 3+x && \mid -1 \\ 2x-1 &= x+2 \end{aligned}$$

Umformungsregeln sollten Schülern (mit Unterstützung anschaulicher Vorstellungen, z. B. Waage) als Eigenschaften rationaler Zahlen plausibel und dann mit Variablen formuliert werden.

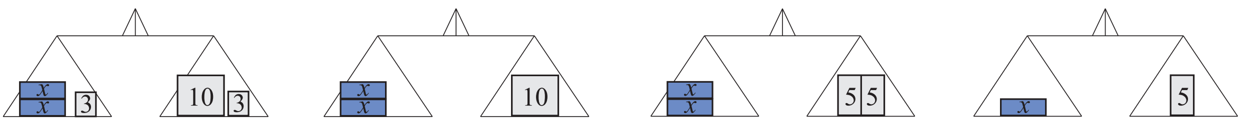
$a = b$	ist äquivalent* zu	$a + c = b + c$
$a = b$	ist äquivalent zu	$a - c = b - c$
$a = b$	ist für $c \neq 0$ äquivalent zu	$a \cdot c = b \cdot c$
$a = b$	ist für $c \neq 0$ äquivalent zu	$a : c = b : c$

* äquivalent – gleichwertig – wenn die eine Aussage gilt, dann gilt auch die andere und umgekehrt

Lösen von Gleichungen mit Äquivalenzumformungen

$$\begin{aligned} -3 \qquad 2x + 3 &= 13 \qquad -3 \\ :2 \qquad 2x &= 10 \qquad :2 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Auf beiden Seiten der Gleichung werden jeweils *dieselben Umformungsschritte* vorgenommen.



Probe: $2 \cdot 5 + 3 = 13$

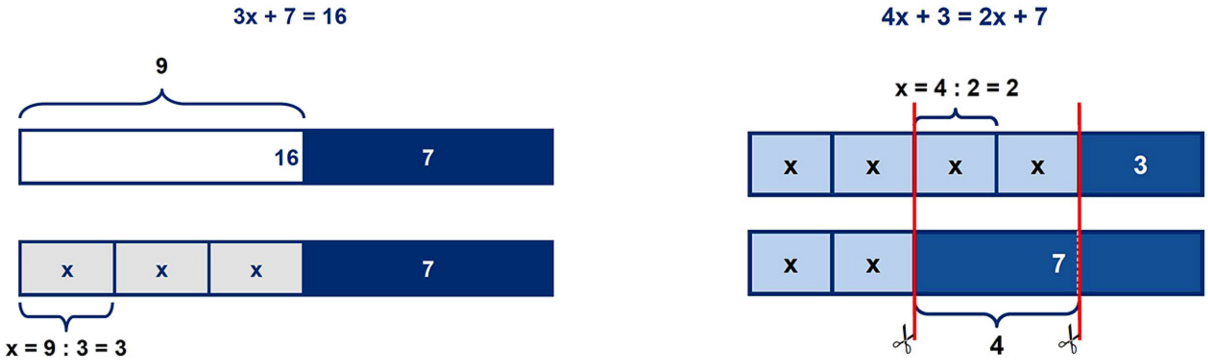
Vor- und Nachteile des Waagemodells

\+ gutes Modell zur Darstellung von Äquivalenzumformungen mit positiven Zahlen
\+ Idee der Gleichheit zweier Terme wird anschaulich vermittelt
– nur positive Zahlen möglich
– Schwierig: Bruchzahlen, Multiplikation, Division
– Ideen für negative Zahlen eher konstruiert (Luftballons o. Ä. schwer zugänglich)

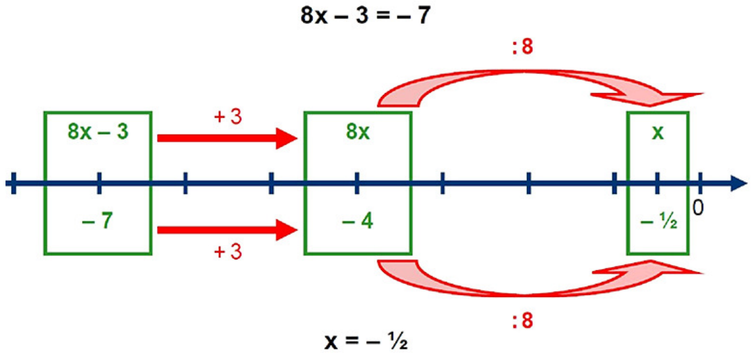
Grenzen des Modells diskutieren, Erweiterung auf negative Zahlen wird meist problemlos akzeptiert.

Weitere Modelle für Äquivalenzumformungen

Streifenmodell[6]



Darstellung an der Zahlengeraden[7]



Zur Schreibweise bei Gleichungsumformungen

Ausführliche Notation

-x	$3x - 3 = x + 5$	-x
	$3x - 3 - x = 5$	
+3	$2x - 3 = 5$	+3
	$2x = 5 + 3$	
:2	$2x = 8$	:2
	$x = 4$	

Verkürzt

$$\begin{aligned} 3x - 3 &= x + 5 && \mid -x \\ 2x - 3 &= 5 && \mid +3 \\ 2x &= 8 && \mid :2 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Bemerkung zur Probe

Die ***Probe*** *nicht vergessen;*

sinnvoll: in jede Seite getrennt einsetzen:

Links: ___________

Rechts: __________

x = __ ist (bzw. ist keine) Lösung

„Merkkasten" zum Lösen von Gleichungen		
$\begin{aligned} 5\cdot(3x-2)-5 &= 12x-3\cdot(x-21) \\ 15x-10-5 &= 12x-(3x-63) \\ 15x-15 &= 12x-3x+63 \\ 15x-15 &= 9x+63 && \mid -9x \\ 6x-15 &= 63 && \mid +15 \\ 6x &= 78 && \mid :6 \\ x &= 13 \end{aligned}$	**Vereinfachen:** Klammern auflösen, Zusammenfassen **Die Variable isolieren:** Verwende dazu die Umformungsregeln	**Probe:** Setze den gefundenen Wert für x ein: *Links*: $5\cdot(3\cdot 13-2)-5 = 5\cdot 37-5$ $= \underline{180}$ *Rechts*: $12\cdot 13-3\cdot(13-21)$ $= 156-3\cdot(-8) = 156+24$ $= \underline{180}$ $x = 13$ *ist Lösung.*

[6]nach Jürgen Roth (Universität Koblenz-Landau)
[7]nach Jürgen Roth (Universität Koblenz-Landau)

Insbesondere zu Beginn ist es beim Lösen von Gleichungen wichtig, die *Form sorgfältig zu beachten*:

- Gleichungen untereinander und zwar „=“–Zeichen unter „=“–Zeichen;
  falls Bruchstrich vorkommt, dieser in Höhe des Gleichheitszeichens;
- benutzte Umformungen notieren;
- keine vorschnellen Verkürzungen

Bemerkung:
Das Lösen von Gleichungen durch Umformen bedingt sichere Kenntnisse einiger Termumformungsregeln. In der Praxis werden diese zum großen Teil parallel zur Gleichungslehre entwickelt.

Eine *allzu starke Vereinfachung der Sprache ist nicht sinnvoll*, sie kann zu Verwechslungen, Unexaktheiten und Fehlern führen.

Häufig verwendete Floskel: *„Auf die andere Seite bringen.“*

Typischer Schülerfehler dabei:

- Gegebene Gleichung: $x + 3 = 5$
- „Ich muss 3 auf die andere Seite bringen, dabei geht das, was oben ist, nach unten.“
- Es ergibt sich $x = \frac{5}{3}$.
- Auch in umgekehrter Richtung kann dieser Trugschluss auftreten.

Sinnvolle Übungen zur Schulung von Teilfertigkeiten

Die folgenden Übungen greifen häufige Schülerfehler auf und reduzieren die Komplexität des Gleichungslösens durch die Konzentration auf Teilaspekte.

1. **Zu vorgegebenen Gleichungen Umformungen notieren**

   Wie wurde umgeformt?

   $$\boxed{}\;\begin{aligned} x+2 &= 10 \\ x &= 8 \end{aligned}\;\boxed{} \qquad \boxed{}\;\begin{aligned} 2x &= 10 \\ x &= 5 \end{aligned}\;\boxed{}$$

   $$\boxed{}\;\begin{aligned} 3x &= 15 \\ x &= 5 \end{aligned}\;\boxed{} \qquad \boxed{}\;\begin{aligned} \frac{x}{3} &= 15 \\ x &= 45 \end{aligned}\;\boxed{}$$

2. **Zu notierten Umformungen die Umformung einer einfachen Gleichung durchführen**

   Führe die Umformung zu Ende. Welche Umformung führt zum Ziel?

   $$\boxed{-4}\;\; 4x = 12 \;\;\boxed{-4} \qquad \boxed{:4}\;\; 4x = 12 \;\;\boxed{:4}$$

   $$\boxed{:3}\;\; 3x = 18 \;\;\boxed{:3} \qquad \boxed{-3}\;\; 3x = 18 \;\;\boxed{-3}$$

3. **Richtig begonnene Umformungen zu Ende führen**

   $$\begin{aligned} 2x+4 &= x+7 \quad \mid -x \\ x+4 &= \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 4-2x &= x+7 \quad \mid +2x \\ 4 &= \end{aligned}$$

4. **Fehler finden:** *Hier wurden Fehler gemacht, finde und korrigiere sie.*

   $$\begin{aligned} 2x &= 5 \\ x &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x+3 &= 0 \\ x &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x-3 &= 15 \\ 2x &= 12 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 10 &= 2x \\ -2x &= 10 \end{aligned}$$

5. **Probeeinsetzungen:** *Überprüfe durch Einsetzen, ob die angegebene Zahl die Gleichung löst.*

   $2 \;\Rightarrow\; 5-2x = 4x-7 \qquad -1 \;\Rightarrow\; 7-x = 5+3x \qquad 2{,}5 \;\Rightarrow\; 2x+5 = 4x$

6. **Gleichungen mit vorgegebener Lösung finden**

   Schreibe fünf Gleichungen auf, die alle die Lösung $x = 2$ haben.

7. **Verschiedene Namen für die Variable verwenden (nicht nur x)**

8. **Verschiedene Lösungswege vorgeben, zu Ende führen, darüber sprechen**
   $\frac{1}{2}x = 15 + \frac{1}{5}x \quad | -\frac{1}{5}x \qquad\qquad \frac{1}{2}x = 15 + \frac{1}{5}x \quad | \cdot 10$

5.7.3 Sonderfälle linearer Gleichungen

Die meisten linearen Gleichungen, die Schüler lösen, haben genau eine Lösung (dies ist bei linearen Gleichungen in einer Variablen auch der Regelfall). Allerdings sollte *nicht der Eindruck* entstehen, dass Gleichungen *in jedem Falle eindeutig lösbar* sind. Beispiele zu unlösbaren Gleichungen und zu Gleichungen mit unendlich vielen Lösungen sind daher immer wieder „einzustreuen".

Unerfüllbare Gleichungen

Beispiel: $2(x+1) = 2x+3$

Als Rätsel: *Gibt es Zahlen, für die gilt: Verdoppelt man die um* 1 *vergrößerte Zahl, so erhält man dasselbe, wie wenn man das Doppelte der Zahl um 3 vergrößert?*
Die gewohnten Umformungsregeln führen zu einem Widerspruch (z. B. $2 = 3$); es kann also keine Lösungen geben.

Allgemeingültige Gleichungen

Beispiel: *Gibt es Zahlen, für die gilt: Verdoppelt man die um 1 vergrößerte Zahl, so erhält man dasselbe, wie wenn man das Doppelte der Zahl um 2 vergrößert?*

Als Gleichung: $2 \cdot (x+1) = 2x+2$
Vereinfacht man, so erhält man eine Gleichung wie $2x = 2x$ oder $0 = 0$.

Bemerkung: Das Thema „Lösen von Gleichungen" wird im 6. Kapitel im Zusammenhang mit funktionalem Denken/ Arbeiten mit Funktionen fortgesetzt.

5.8 Schülerschwierigkeiten beim Algebraisieren von Sachsituationen

Viele Schwierigkeiten bereitet allgemein das *Aufstellen von Termen bzw. Gleichungen*. Häufig gelingt es Schülern nicht, Gleichungen aufzustellen, die gegebene Sachsituationen adäquat beschreiben. Wenn dies gelingt, bereitet die Lösung der Gleichung dann oft weniger Probleme.

Ein vielfach auftretender Fehler ist das „negative Übersetzen" in Gleichungen.

Beispiel 1: Das Bett ist um 10 cm länger als der Tisch: $B + 10 = T$

Beispiel 2: (aus MALLE: *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*): An einer Universität sind P Professoren und S Studenten. Auf einen Professor kommen 6 Studenten. Dafür stellen auch viele Akademiker eine falsche Gleichung auf: $P = 6S$.

Hilfen: – Variablen genau benennen: Nicht P = Professoren, sondern P = Anzahl der Prof.
– graphisch veranschaulichen (z. B. Köpfe)

Natürlich lassen sich Situationen auch von vornherein so formulieren, dass weniger Schwierigkeiten bei der „Übersetzung" in Gleichungen auftreten, z. B.:[8]

Beispiel 2*: Die Zahl S der Studenten ist sechs mal so groß wie die Zahl P der Professoren.

Bei dieser Formulierung liegt die richtige Gleichung auf der Hand. Allerdings sollten Schüler auch lernen, weniger „mundgerechte" Formulierungen richtig zu übersetzen.

Ein Student untersuchte im Rahmen einer wissenschaftlichen Hausarbeit das Lösungsverhalten von Schülern 7., 8. und 9. Klassen einer Realschule bei (u. a.) der folgenden Aufgabe:

- Laut Fernsehkommentator waren bei der Fußball-Europameisterschaft 2008 beim letzten Gruppenspiel der Deutschen gegen Österreich mehr österreichische als deutsche Fans im

[8]Vgl. Vollrath, H.-J.; Weigand, H.-G.: *Algebra in der Sekundarstufe*. Heidelberg: Spektrum, 2007 (3. Aufl.).

Ernst-Happel-Stadion in Wien. Insgesamt verfolgten 51000 Zuschauer die Partie live im Stadion. Die Polizei, die Erfahrung im Schätzen großer Menschenmengen hat, berichtete, dass doppelt so viele Österreicher wie Deutsche im Stadion waren. Die Anzahl der übrigen Zuschauer betrug drei Viertel der Deutschen. Wie viele Deutsche, Österreicher und übrige Zuschauer waren jeweils im Stadion?

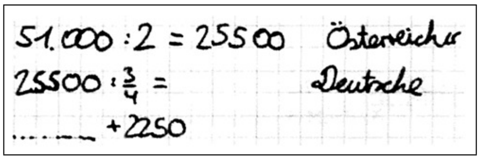
Musterlösung (gekürzt):

- Anzahl der deutschen Zuschauer: x
  Anzahl der österreichischen Zuschauer: $2x$
  Anzahl der übrigen Zuschauer: $\frac{3}{4}x$
- $x + 2x + \frac{3}{4}x = 51000$
  $x = 13600$
- Es waren 13600 Deutsche, 27200 Österreicher und 10200 übrige Zuschauer im Stadion.

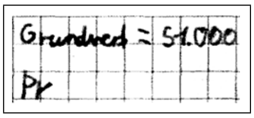
Nur ein geringer Teil der beteiligten Schüler fand für diese Aufgabe einen richtigen Ansatz.[9] Im Folgenden wird die in der Hausarbeit vorgenommene Analyse von Schülerfehlern wiedergegeben.

Klasse 7

Die Mehrheit der Schüler probierte, die Aufgabe durch mehrere einzelne Berechnungen zu lösen.

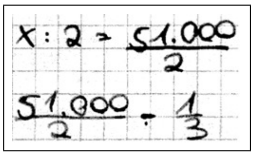


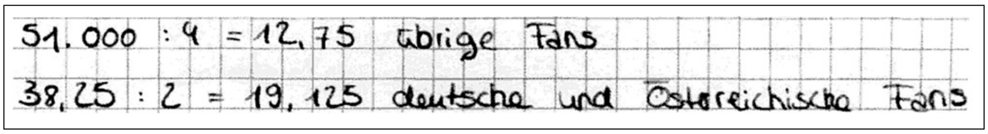
Sehr auffallend war der Lösungsansatz eines Schülers, der die Anzahl aller Zuschauer als „Grundwert“ notierte und dann einen „Prozentwert“ angeben wollte. Er bemerkte wohl, dass es sich doch nicht um eine Prozentrechenaufgabe handelte, und brach die Aufgabe ab.



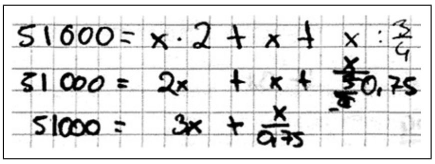
Klasse 8

Auch die Achtklässler versuchten fast alle, mithilfe von einzelnen Überlegungen und Berechnungen zur Lösung zu kommen.

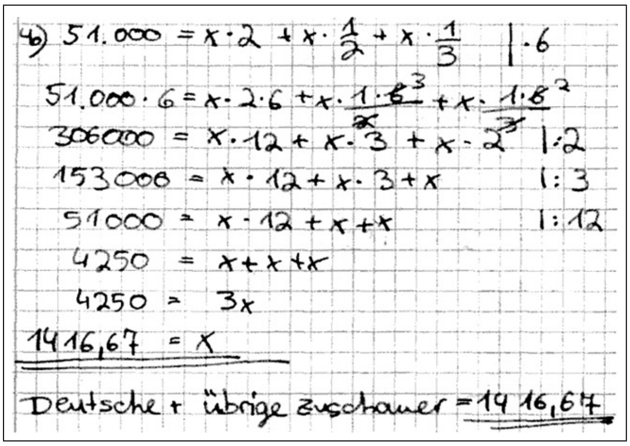




Nur vereinzelt stellten Schüler eine Gleichung auf. Dabei wurden die Zahlenbeziehungen jedoch falsch übersetzt. Ein Schüler war sehr nah an der richtigen Gleichung. Sein Fehler lag nur im Term für die Anzahl der übrigen Zuschauer, die er durch $x : \frac{3}{4}$ statt durch $x \cdot \frac{3}{4}$ ausdrückte.



Ein anderer Schüler hatte auch Probleme, die Anzahl der übrigen Zuschauer formal anzugeben. Er gab sie mit „$x \cdot \frac{1}{3}$“ an. Darüber hinaus ergaben bei ihm auch die beiden weiteren Summanden keinen Sinn. „$x \cdot 2$“ könnte man als Anzahl der Österreicher deuten, wenn „x“ für die Anzahl der Deutschen steht, „$x \cdot \frac{1}{2}$“ könnte man als Anzahl der Deutschen sehen, wenn mit „x“ die Anzahl der Österreicher gemeint ist. Die beiden ersten Summanden würden also nur dann zum Text passen, wenn die Variable jeweils unterschiedlich belegt wäre. Beim Lösen der Gleichung trat ein weiterer Fehler auf: Er dividierte beide Seiten nacheinander durch die einzelnen Koeffizienten der rechten Seite, statt dort zuerst zusammenzufassen. Besonders auffällig ist zudem die Deutung der erhaltenen Lösung (1416,67 Personen).

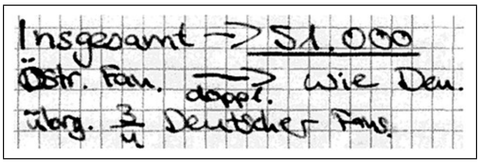


---

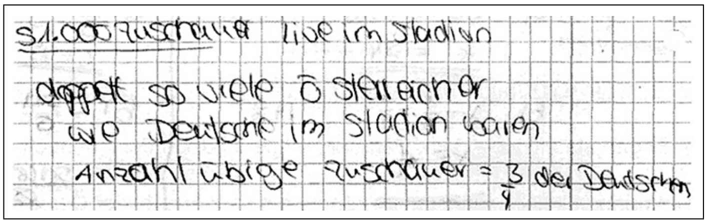
[9]Nur 55% der Schüler nahmen die Aufgabe überhaupt in Angriff, knapp 5% gelang eine vollständig richtige Lösung.

Klasse 9

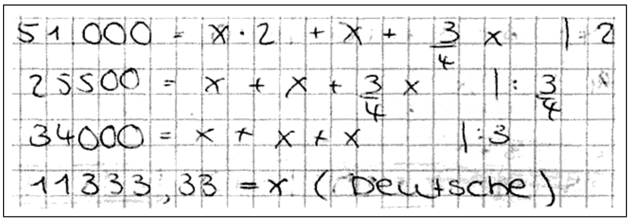
Die meisten Schüler notierten lediglich die Informationen aus dem Text und konnten daraus aber anscheinend keine Gleichung aufstellen.



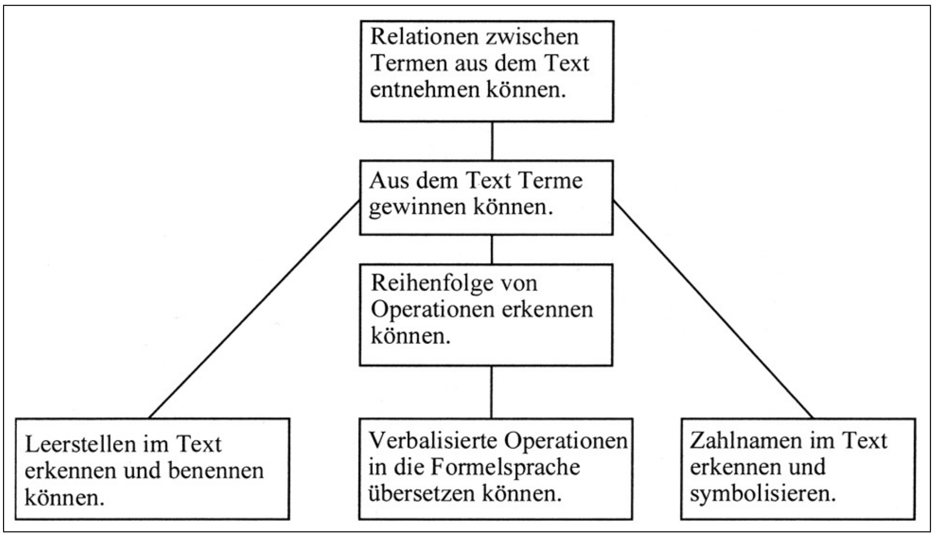
Ein Schüler hatte dabei deutliche Schwierigkeiten, nur das Wichtigste herauszufiltern und übernahm teilweise Passagen aus dem Text.



Mehrere Schüler konnten zwar eine korrekte Gleichung aufstellen, lösten aber die Gleichung, ohne die Terme zusammenzufassen bzw. ohne die Äquivalenzumformung auf alle Teilterme anzuwenden.



Diese vielfältigen Fehlerursachen zeigen, dass viele Schüler sowohl Schwierigkeiten beim Mathematisieren (Aufstellen adäquater Gleichungen zu Sachsituationen), als auch hinsichtlich innermathematischer Aspekte des Lösens von Gleichungen haben. Für den Übergang von einer Sachaufgabe zu einer Gleichung (oder Ungleichung) gibt VOLLRATH folgende Hierarchie von Fähigkeiten, die Schüler erwerben müssen, an:[10]



VOLLRATH stellt zwei Strategien für das Algebraisieren von Text- bzw. Sachaufgaben heraus:[11]

A. Der Schüler entscheidet, welche Größe gefragt ist; er bezeichnet sie (in der Regel) mit x.

   Damit werden Terme zusammengesetzt.
   Die Terme werden in Relation gesetzt.

   Im Vordergrund steht also die gesuchte Größe.

B. Der Schüler erkennt eine Relation, die der Aufgabe zugrunde liegt, etwa:
   Eine Größe ist das 3-fache der anderen Größe.

[10] Vollrath, H.-J.; Weigand, H.-G.: *Algebra in der Sekundarstufe*. Heidelberg: Spektrum, 2007 (3. Aufl.), S. 230.
[11] Die folgenden Ausführungen sind dem o. g. Buch von Vollrath/Weigand entnommen (S. 231f.).

Es werden Terme in Relationen zueinander gebildet, etwa: x und $3x$.
Die Relation wird mit Hilfe der Terme ausgedrückt.

Im Vordergrund stehen die Beziehungen zwischen den auftretenden Größen.

Betrachten wir die beiden Aufgaben:

a) Zwei Zahlen unterscheiden sich um 2. Vermehrt man jede der beiden Zahlen um 3, so nimmt ihr Produkt um 45 zu. Wie heißen die beiden Zahlen?

b) Ein gleichschenkliges Dreieck hat einen Umfang von 15 cm. Jeder Schenkel ist doppelt so lang wie die Grundlinie. Wie lang sind die Seiten?

Bei Aufgabe a) wird man die kleinere Zahl x nennen, die andere ist dann $x + 2$. Ihr Produkt ist $x(x + 2)$. Nun werden die Zahlen um 3 vermehrt. Man erhält dann $x + 3$ und $x + 5$ als neue Zahlen und $(x + 3)(x + 5)$ als neues Produkt. Das Produkt hat bei der Vergrößerung der Zahlen um 45 zugenommen, also erhält man durch Vergleich der Produkte

$$(x + 3)(x + 5) = x(x + 2) + 45.$$

Die Beziehung, die zur Gleichung führt, wird erst am Ende erfasst. Die Terme werden schrittweise von unten aufgebaut. Wir sind also der Strategie A gefolgt.

Bei Aufgabe b) hat man sogleich die Formel

$$U = g + 2s.$$

Nun werden die Daten eingesetzt: Für U die Zahl 15, für s setzt man $2g$, also ergibt sich die Gleichung

$$15 = g + 4g.$$

Hier steht also die Beziehung im Vordergrund, die Terme schälen sich erst im Laufe der Überlegungen heraus. Dies entspricht der Strategie B.

Häufig ist es zweckmäßig, sich bei der Übersetzung zunächst einen Überblick über die Sachverhalte zu verschaffen. Das kann ein Schema oder eine Skizze sein. Für Aufgabe a) bietet sich folgende Darstellung an:

	Zu Anfang:	Nach Änderung:
Kleinere Zahl:	x	$x + 3$
Größere Zahl:	$x + 2$	$x + 5$
Produkt:	$x(x + 2)$	$(x + 3)(x + 5)$ bzw. $x(x + 2) + 45$