Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
A. Filler

Sommersemester 2020

Zusammenfassende Notizen zu der Vorlesung

Didaktik der Algebra und Zahlentheorie

6 Funktionales Denken und Arbeiten mit Funktionen

„The true mathematical wealth is created by the perspective of function.“ FREUDENTHAL (1983)[1]

Funktionales Denken und Arbeiten mit Funktionen sind seit dem Beginn des 20. Jahrhunderts zentraler Bestandteil der Mathematikunterrichts. Eine wesentliche Bedeutung hierfür hatten die Meraner Reformen und hierbei insbesondere FELIX KLEIN.

> *„Wir wollen nur, dass der allgemeine Funktionsbegriff in der einen oder anderen* EULER*schen Auffassung den ganzen mathematischen Unterricht der höheren Schulen wie ein Ferment durchdringe; er soll gewiss nicht durch abstrakte Definitionen eingeführt, sondern an elementaren Beispielen, wie man sie schon bei* EULER[2] *in großer Zahl findet, dem Schüler als lebendiges Besitztum überliefert werden.“*[3]

6.1 Funktionales Denken

3 Aspekte funktionalen Denkens:[4]

1. *Durch Funktionen beschreibt oder stiftet man Zusammenhänge zwischen Größen: einer Größe ist dann eine andere zugeordnet, so dass die eine Größe als abhängig gesehen wird von der anderen.*
2. *Durch Funktionen erfasst man, wie Änderungen einer Größe sich auf eine abhängige Größe auswirken.*
3. *Mit Funktionen betrachtet man einen gegebenen oder erzeugten Zusammenhang als Ganzes.*

Zu Aspekt 1 (Zuordnungscharakter):

- Aspekt betont die eindeutige Zuordnung und die Abhängigkeit von Größen;
- Schreibweisen $x \to y$ und $y = f(x)$;
- In senkrecht notierten Tabellen: „waagerechter Zusammenhang“ zwischen x und y.

  Beispiele:

  Preis in Abhängigkeit von der Masse

Masse in kg	Preis in Euro
1	1,49
2	2,98
3	4,47
4	5,96
...	...

  Zurückgelegter Weg bei gleichförmiger Bewegung

Zeit in h	Weg in km
1	80
2	160
3	240
4	320
...	...

  Fallhöhe beim freien Fall

Zeit in s	Fallhöhe
1	4,905
2	19,62
3	44,15
4	78,48
...	...

- Aspekt (1) ist sicherlich entscheidend für die große Fruchtbarkeit des Funktionsbegriffs in der Mathematik und den Anwendungen.

[1] FREUDENTHAL, H.: Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht: D. Reidel, 1983.

[2] EULER (1707-1783) verwendete 2 verschiedene Erklärungen des Funktionsbegriffs:
- Funktion y ist jeder *„analytische Ausdruck“* in x;
- $y(x)$ wird im Koordinatensystem durch eine *„libero manus ductu“* (freihändig gezeichnete Kurve) definiert.

[3] KLEIN, F.: Elementarmathematik vom Höheren Standpunkt aus, Bd. 1, Berlin, Heidelberg: Springer, 1968, S. 221.

[4] VOLLRATH, H.-J.: Funktionales Denken. In: *Journal für Mathematikdidaktik* 10 (1989), S. 3–37; siehe auch: http://www.didaktik.mathematik.uni-wuerzburg.de/history/vollrath/papers/052.pdf

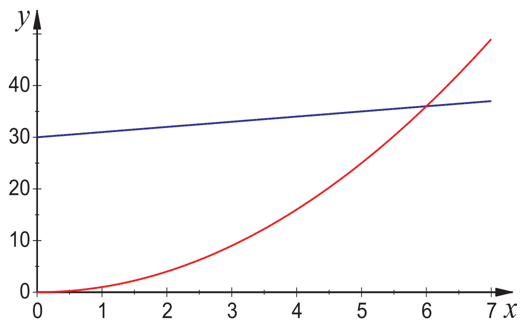
- Du Bois-Reymond (1877) sieht in der Betrachtung funktionaler Zusammenhänge *„eine der fruchtbringendsten Methoden, durch welche der menschliche Geist seine Leistungsfähigkeit erhöhte."* Die Einführung in diese Methode wird nach seiner Meinung für den *„einigermaßen Begabten: ein für das Leben epochemachender Lichtblick"*.[5]
- Inhaltliches Verständnis funktionaler Zusammenhänge kann formales Abarbeiten von Kalkülen ersetzen und macht oft das Auswendig-Lernen von Formeln überflüssig.
- Für *die Fähigkeit zur mathematischen Betrachtung der uns umgebenden Erscheinungswelt* ist *die Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens* von fundamentaler Bedeutung.
- Didaktische Schwierigkeiten ergaben sich vor allem aus der Natur der voneinander abhängigen Größen und aus der Art des Zusammenhanges: *„empirische"* und *„mathematische"* Funktionen. In der Realität werden oft *„empirische"* durch *„mathematische"* Funktionen angenähert.
- Arbeit mit funktionalen Zusammenhängen erfordert *nicht immer Funktionsterme*.
- Für Euler konnte eine Funktion durch einen „analytischen Ausdruck" oder durch eine „freihändig gezeichnete Kurve" im Koordinatensystem gegeben sein.
- Funktionen beschreiben beobachtete oder vermutete Zusammenhänge, z. B.:
  - die Abhängigkeit des Umfangs vom Durchmesser eines Kreises,
  - die Abhängigkeit der Dehnung einer Schraubenfeder von der Belastung,
  - die Abhängigkeit des Weges von der Zeit bei verschiedenen Arten von Bewegungen,
  - die für einen Weg benötigte Zeit in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit,
  - die Größe der Weltbevölkerung in Abhängigkeit vom Datum.
- Funktionen schaffen auch „neue" Zusammenhänge, etwa wenn man durch $y = x^2$ jeder Zahl x ihr Quadrat zuordnet.
- Finden einer geeigneten Funktion: „Entdecken"; Aufstellen von Funktionen: „Erfinden".

<u>Zu Aspekt 2 (Änderungsverhalten):</u>

- Das Änderungsverhalten drückt sich in Beziehungen aus wie:
  - Je größer x wird, desto größer wird y.
  - Verdoppelt (verdreifacht, ...) sich x, so verdoppelt (verdreifacht, ...) sich auch y.
  - Verdoppelt (verdreifacht, ...) sich x, so wird y halbiert (gedrittelt, ...).
  - Verdoppelt sich x, so vervierfacht sich y.
  - Erhöht sich x um 1, so verdoppelt sich y.
- In senkrecht notierten Tabellen interessieren auch „senkrechte Zusammenhänge".
- Änderungsverhalten: interessant in der Arithmetik, der Geometrie und in Anwendungen.

  Beispiel: „Termwettrennen"

x	$x+30$	$x \cdot x$
1	31	1
2	32	4
3	33	9
4	34	16
5	35	25
6	36	36
...	...	...



- *„Mit der Forderung einer Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens ist in die klassische Ruhe des geometrischen Unterrichts Bewegung gekommen; ... . Linien, Flächen und Körper entstehen, wachsen und schwinden; sie bestehen aus beweglichen Elementen. Mit der wachsenden oder schwindenden Größe des einen wächst oder mindert sich die Größe des anderen. Die Seite ändert den Winkel, der Winkel die Seite, die Höhe den Inhalt, der Radius den Kreis, die Kante den Körper."* Engel, 1922

[5] Du Bois-Reymond, E.: Kulturgeschichte und Naturwissenschaft, 1877.

- Verstärkt wird dieser Trend durch die Nutzung dynamischer Geometriesoftware (DGS).
- Betrachtung systematischer Änderungen als Unterrichtsmethode – Weg, um mathematische Einsicht zu vermitteln und Verständnis zu erzielen.
- Wird in einer Sachsituation eine Funktion betrachtet, die den Zusammenhang zwischen Größen beschreibt, dann kann man als Gesetzmäßigkeit entdecken, dass bestimmte Änderungen der einen Größe zu bestimmten Änderungen der anderen führen.
- Das Änderungsverhalten von Funktionen kann besonders elegant durch *Funktionalgleichungen* zum Ausdruck gebracht werden.
- In der Sekundarstufe II wird das Änderungsverhalten mit der Ableitung dann quantifizierbar.

<u>Zu Aspekt 3 (Sicht auf Funktionen als Ganzes):</u>

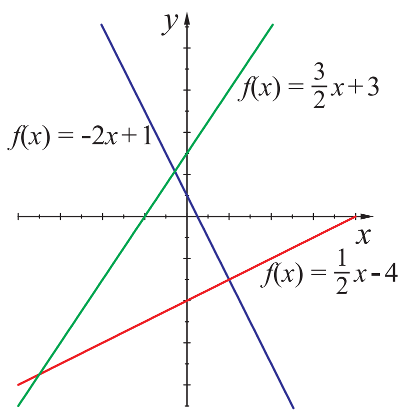
- Man betrachtet nicht nur einzelne Wertepaare, sondern die Menge aller Wertepaare – also gesamte Funktion – als neues Objekt.
- *„Mathematische Sachverhalte, die zu einem sinnvollen geschlossenen Ganzen gehören und in irgendeiner Weise eine verstehbare Einheit bilden, lassen sich leichter merken als eine gleiche Anzahl von Sachverhalten, die ihrem Sinne nach wenig oder nichts miteinander zu tun haben."* (STRUNZ, 1949)
- Definitionen des Funktionsbegriffs aus Schulbüchern:
  - Eine Zuordnung, bei der jedem Element einer Menge D *genau ein* Element einer Menge W zugeordnet wird, nennt man *Funktion*.

    Mathematik 8 (Brandenburg, Real- und Gesamtschule). Berlin: Paetec 2003.
  - Unter einer *Funktion* versteht man eine Zuordnung, bei der zu jeder Größe aus einem ersten Bereich *genau eine* Größe aus einem zweiten Bereich gehört.

    Schnittpunkt 8 (Baden-Württemberg, Realschule). Stuttgart: Klett 2006.
  - Eine Zuordnung x $\mapsto$ y, die jedem x-Wert genau einen y-Wert zuordnet, heißt *Funktion*.

    Lambacher Schweizer 8 (Baden-Württemberg, Gymnasium). Stuttgart: Klett 2006.
- Funktionen werden zu neuen Objekten; es werden *Funktionsnamen* benötigt:
  - lineare Funktion
  - f mit $f(x) = 3x + 1,8$
  - die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$
  - die quadratische Funktion mit der Gleichung ... usw.
- Unterscheidung zwischen *Funktionsnamen* und *Funktionswerten*:
  - *Funktionsname*: sin
  - *Funktionswerte*: $\sin x$
  - die Funktion f mit $f(x) = ...$
- Unter den verschiedenen Darstellungsformen von Funktionen eröffnet sich der Blick für das Ganze besonders deutlich bei den *grafischen Darstellungen*.
- Durch verschiedene Werte für den Anstieg m und den Achsenabschnitt n ergeben sich verschiedene lineare Funktionen f mit Gleichungen der Form $f(x) = mx + n$.

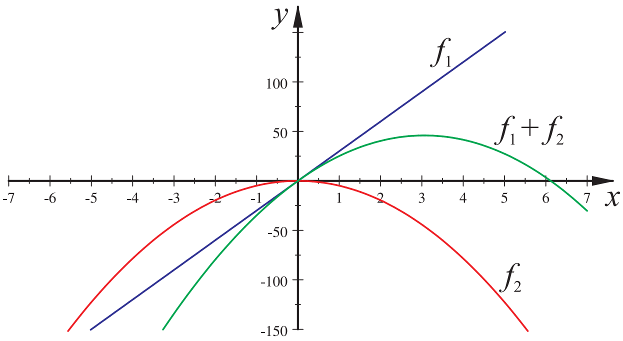
→ Funktionen als *Objekte*, die durch *Attribute* (bei linearen Funktionen Anstieg und Achsenabschnitt) gekennzeichnet sind.



- Mit Funktionen als ganzheitlichen „Objekten“ lassen sich Operationen ausführen, z. B.:
  - Addition von Funktionen,
  - Multiplikation von Funktionen mit reellen Zahlen.

  Beispiel:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 30\,x \\ f_2(x) &= -\frac{9,81}{2}x^2 \\ f_1+f_2\,(x) &= -\frac{9,81}{2}x^2+30\,x \end{aligned}$$



- Funktionen mit Parametern: $a \mapsto f_a$; Scharen von Funktionsgraphen
- Verkettung von Funktionen $f_2 \circ f_1$
- Ableitungen und Stammfunktionen: $f \mapsto f'$, $f \mapsto F$
- In Differenzialgleichungen treten Funktionen selbst als gesuchte Objekte auf.

6.2 Entwicklung funktionalen Denkens; Propädeutik des Funktionsbegriffs

- Funktionales Denken beginnt bei intuitiven Vorstellungen über funktionale Zusammenhänge wie: „*Wenn man die eine Größe ändert, dann ändert sich die andere*“.
- Teilweise werden die frühen Ausprägungen noch nicht als funktionales Denken, sondern als „*funktionale Anschauung*“ oder „*funktionale Vorstellungen*“ bezeichnet.
- Elementare funktionale Vorstellungen sind Voraussetzungen für funktionales Denken bei Kindern.

  „*Schon das vorschulpflichtige Kind schließt, daß der Vater ein immer größeres Stück vom Garten umgegraben haben wird, je länger er daran arbeitet, daß der Milchtopf umso voller wird, je länger die Mutter aus der Kanne Milch hineingießt. Es hat dazu nicht nötig, den Vorgang in seinen Einzelheiten immer wieder zu beobachten, sondern es arbeitet mit der Vorstellung dieser Vorgänge.*“

  (Rudert, 1919)
- Bereits Rudert forderte, intuitive funktionale Vorstellungen zu fördern, z. B.:

  Kinder zeigen bei geschlossenen Augen mit der Hand auf den Kopf einer Person in der Ferne und deuten an, wie sich die Stellung des Armes ändert, wenn sich die Person nähert.

  → Vermittlung von Erfahrungen und Vorstellungen.
- Die elementarste funktionale Vorstellung bezieht sich auf *Monotonie*: Wenn eine Größe größer wird, so wird eine andere größer (kleiner).
- Schritt von der Monotonie zur *Proportionalität* (speziellerer, präziser beschriebener Zusammenhang): Verdoppelt, verdreifacht, vervierfacht, ..., halbiert, ... sich eine Größe, so verdoppelt, verdreifacht, vervierfacht, ..., halbiert, ... sich die andere Größe.
- Piaget beobachtete, dass vor dem Erfassen der Proportionalität häufig fälschlicherweise eine additive Änderung angenommen wird, also z. B. $f(x+a) = f(x) + a$.

  Beispiele (insbesondere auch Zusammenhänge der Art Stückzahl/Masse → Preis) können derarartige Fehlvorstellungen überwinden helfen.
- Entwicklung funktionalen Denkens erfordert, folgende Fähigkeiten zu entwickeln:
  (1) Zusammenhänge zwischen Größen festzustellen, anzugeben, anzunehmen und zu erzeugen;
  (2) Hypothesen über die Art eines Zusammenhanges und über den Einfluss von Änderungen zu bilden, zu kontrollieren und gegebenenfalls zu revidieren.

$\rightarrow$ Es müssen dazu Gedankenverbindungen hergestellt, Blickrichtungen verändert und Handlungen konkret und in Gedanken durchgeführt werden.

- Geeignete Handlungen sind z. B. Experimente mit Bewegungen (Laufen, Fahrrad fahren, Verwendung von Spielzeug wie Eisenbahnen, Murmeln etc.):
  – Welcher Weg wurde nach 10 s, 20s, ... zurück gelegt?
  – Wie lange brauche ich, um einen Weg zurückzulegen?
  – Wo muss ich starten, um zu einer gegebenen Zeit ein bestimmtes Ziel zu erreichen?

Phasen bei der Herausbildung des Verständnisses funktionaler Zusammenhänge

1. Monotonie (qualitativ: x größer $\rightarrow$ y größer)
2. Proportionale Zusammenhänge (s. o.) sowie der umgekehrte Fall Antiproportionalität sind in der Schule lange von besonderer Bedeutung; sicheres Verständnis hierfür zu entwickeln, ist ein wichtiges Ziel.
   Aber: Es sollte den Schülern immer wieder deutlich werden, dass nicht jeder monotone Zusammenhang proportional (bzw. antiproportional) ist.
3. Beschreibung andersartiger funktionaler Zusammenhänge:

   SUAREZ *beobachtete, dass Kinder z. B. bei einem Versuch, dem eine quadratische Funktion zugrunde liegt, zunächst einen proportionalen Zusammenhang annahmen, um die gestellte Aufgabe (Bestimmung eines unbekannten Wertes) zu lösen. Viele Kinder haben dann Probleme, sich von dieser Annahme zu trennen, selbst wenn sie zu offensichtlich falschen Ergebnissen führt.*

   Rein spontane Erkenntnisse sind hierbei nicht mehr zu erwarten; Schüler benötigen ein „Repertoire" an Funktionen, um komplexere Zusammenhänge exakt zu beschreiben.

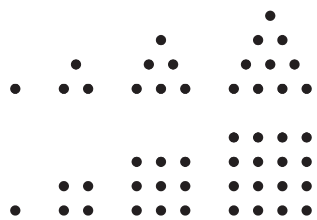
   Propädeutik ist dennoch möglich, z. B. Vergleich von Bewegungsverläufen: gleichförmige Bewegung, beschleunigte Bewegung (Fall, Herunterrollen).

Weitere Möglichkeiten zur Propädeutik des Funktionsbegriffs in der Grundschule

- *Rechenoperationen* sind naturgemäß als Funktionen zweier Variabler interpretierbar:
  $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \qquad \cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}.$

  „Festhalten" eines Operanden $\Rightarrow$ Betrachtung von Funktionen in einer Variablen (genauer: *Zahlenfolgen*, z. B. „Malfolgen").
- Untersuchung einfacher funktionaler Zusammenhänge an Mustern, z. B. *figurierte Zahlen*.
- Beispiele aus der Geometrie, z. B. *Flächeninhalte* von Quadraten.

1	6
2	12
3	18
4	24
5	30
...	...



Seitenlänge	Flächeninhalt
1 cm	1 cm^2
2 cm	4 cm^2
3 cm	9 cm^2
4 cm	16 cm^2
...	...

Propädeutik des Funktionsbegriffs bei der Behandlung der Bruchrechnung

- Brüche werden meist als Größen eingeführt ($\frac{1}{2}$ Pizza, $\frac{1}{4}$ Liter, ...); für die Veranschaulichung der Addition von Brüchen ist das „*Größenkonzept*" eine sinnvolle Grundlage.
- Die Multiplikation von Brüchen lässt sich mithilfe des „*Operatorkonzepts*" verdeutlichen.

  Beispiel: $\frac{2}{3}$ *von* 6 kg sind 3 kg.

  Deutung: „$\frac{2}{3}$ *von*" ordnet der Größe 6 kg die Größe 4 kg zu.

- Multiplikationsoperator $(\cdot m)$: Größe $a \to$ Größe $a \cdot m$
  Divisionsoperator $(: n)$: Größe $a \to$ Größe $a : n$
- Konkretisierung z. B. über Streckung bzw. Zerteilung von Stäben.
- Verkettung von Operatoren – „Hintereinanderschalten“
- Bruchoperator $\cdot\frac{m}{n}$ wird als Verkettung aufgefasst: $\cdot\frac{m}{n} := (\cdot m) \circ (: n)$

$$x \xrightarrow{\cdot\frac{2}{3}} \frac{2}{3}x$$

6.3 Proportionale (und andere) Zuordnungen

Die Behandlung von Zuordnungen ist ein besonders wichtiger Bestandteil der Propädeutik des Funktionsbegriffs. Vor allem proportionale Zuordnungen können sogar bereits weit vor der expliziten Behandlung der Proportionalität (Klasse 6 oder 7) auftreten.

Beispiel:
Drei Karten für ein Fußballspiel kosten 54 €. Wie viel Geld kosten die Karten für alle 27 Schüler der Klasse 4b?[6]
Schülerlösungen:

- Eine Karte kostet 18 €. 27 Karten kosten $27 \cdot 18$ € = 486 €.
- 27 Karten kosten 9 mal so viel wie 3 Karten, also $9 \cdot 54$ € = 486 €.

Lösungsgedanken enthalten Ansätze funktionaler Überlegungen: naive funktionale Charakterisierung der direkten Proportionalität. Später (Kl. 7) erfolgt oft eine Schematisierung:

- Dreisatzschema
- Umstellen einer Verhältnisgleichung nach der gesuchten Größe

Die sinnvollen „naiven“ Vorstellungen der Schüler sollten dabei nicht vollständig durch Schematismus ersetzt werden.

Eigenschaften von proportionalen und antiproportionalen Zuordnungen
(in engem Zusammenhang zum Sachrechnen)

(1) Grundeigenschaft **proportionaler Zuordnungen**: $f(a \cdot x) = a \cdot f(x)$
Beispiel: f: Gewicht einer Ware $\to$ Preis der Ware

(2) Grundeigenschaft **antiproportionaler Zuordnungen**: $f(a \cdot x) = \frac{1}{a} \cdot f(x)$
Beispiel: f: Anzahl der Arbeiter $\to$ Zeit zur Erledigung der Arbeit

Die *Eigenschaften* sollten zunächst im Vordergrund stehen, nicht die Funktionsgleichungen. Aufgrund inhaltlichen Verständnisses der Eigenschaften lassen sich viele Sachrechenaufgaben lösen.

Wichtig ist die Darstellung von Zuordnungen in Tabellen (vgl. die Beispiele auf S. 1). Hierbei sind bereits die beiden ersten Aspekte funktionalen Denkens von Bedeutung. (In senkrecht notierten Tabellen machen „waagerechte Zusammenhänge“ das *Zuordnungsverhalten* und „senkrechte Zusammenhänge“ das *Änderungsverhalten* deutlich.)

Wichtig ist es natürlich, bei der Behandlung der Proportionalität die *Identifikation von Monotonie und Proportionalität zu vermeiden*. Die Problematik wird bereits in dem Zitat von SUAREZ (siehe S. 5) angedeutet, sie besteht auch bei Schülern der Mittelstufe noch oft.

Bei der Behandlung der Proportionalität sind somit zwei scheinbar *gegensätzliche Ziele* im Auge zu behalten:

- Herausbildung und Festigung von Fähigkeiten im Umgang mit proportionalen Zuordnungen (die auch die Grundlage vieler Sachaufgaben bilden).
- Schüler dürfen aus (wachsender) Monotonie „erhöht sich der eine Wert, so erhöht sich auch der andere Wert“ nicht automatisch auf Proportionalität schließen.

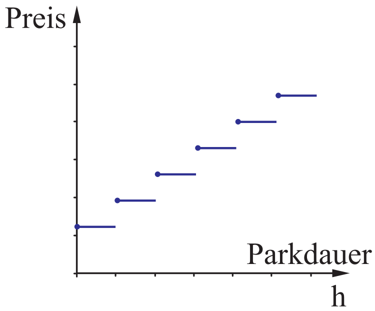
[6] Die Aufgabe wurde in einer 4. Klasse einer Mannheimer Grundschule im Zeitraum der Fußball-EM 2004 gestellt. Sie war nicht in eine Unterrichtsreihe zu proportionalen Zuordnungen eingebettet, sondern wurde in einer Übungsstunde zur Beherrschung der Rechenoperationen gestellt.

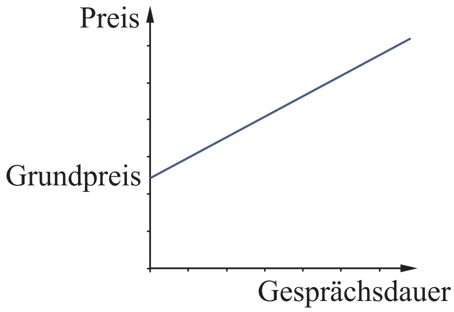
- Antiproportionale Zuordnungen sind zwar ein Gegenbeispiel zur Proportionalität, reichen aber nicht aus, um Gleichsetzungen „monoton wachsend = proportional“ zu konterkarieren.

⇒ Bereits weit vor ihrer expliziten Behandlung sollten weitere Klassen von Funktionen (Zuordnungen) betrachtet werden.

Beispiele von Zuordnungen, die sich eignen, um eine „Übergeneralisierung“ der Proportionalität bei Zuordnungen zu vermeiden

- Zuordnung: *Seitenlänge* ⇒ *Flächeninhalt* bei Quadraten.
- Weitere *Quadratische (oder annähernd quadratische) Funktionen*
  Beispiele: Freier Fall: Falldauer → Fallhöhe
  Herunterrollen: Rolldauer → zurückgelegter Weg
- *Stückweise konstante Funktionen (Treppenfunktionen)*
  Beispiele: Postgebühren in Abhängigkeit vom Gewicht,
  Parkhausgebühren in Abhängigkeit von der Parkdauer.
- *Lineare (aber nicht proportionale) Funktionen*:
  Beispiel: Preise: Grundpreis + „Arbeitspreis“ (Telefon, Handy, etc.).





Experimentelle Zugänge zu Funktionen

Beispiele für lineare Funktionen, die aus Experimenten hervorgehen[7]

- Gewicht von Papprechtecken in Abhängigkeit vom Flächeninhalt
  Materialien: Briefwaage, Lineal, Papprechtecke gleicher Stärke
  Problem: Der Flächeninhalt eines krummlinig begrenzten Pappstücks soll bestimmt werden.
- Längen von Kerzen in Abhängigkeit von der Brenndauer
  Materialien: Lineal, Uhr, dünne Geburtstagskerzen
  Problem: Wie lange hat eine Kerze gebrannt, wenn sie neu 12 cm lang war? Wann wird die Kerze ganz abgebrannt sein?

Die gemessenen Werte werden zuerst in Tabellen, dann in ein Koordinatenkreuz mit geeigneten Einheiten eingetragen. Die gestellten Probleme lassen sich jeweils mit der Zeichnung lösen.

Beispiele für nichtlineare Funktionen, die aus Experimenten hervorgehen[8]

- Abhängigkeit der Fallhöhe von der Fallzeit.
- Hinabrollen von Kugeln oder Fahrzeugen auf einer geneigten Ebene: Zeit → Weg.

  Umkehrfragestellung: Wie lange benötigt ein Wagen, um einen bestimmten Weg zurückzulegen? (Kovariationsaspekt)
- Abhängigkeit der Beleuchtungsstärke vom Abstand von der Lichtquelle.
- Eintauchen von Kugeln verschiedener Radien in Wassergefäße:
  Radius → Volumen.

[7] VOLLRATH, H.-J.: Schülerversuche zum Funktionsbegriff. In: *MU* 24 (1978), 4, S. 60-101.

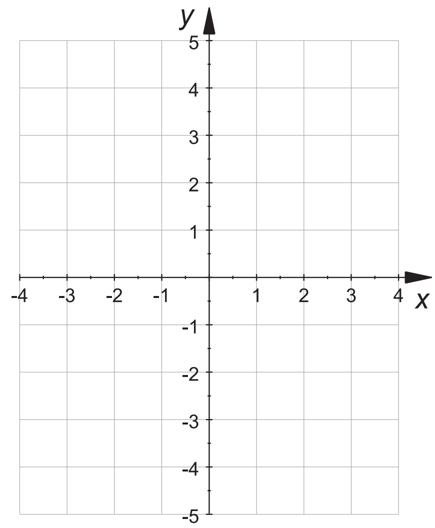
[8] BECKMANN, A.: Nichtlineare Funktionen in der Hauptschule. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2006*. Hildesheim: Franzbecker 2006.

6.4 Formalisierung des Funktionsbegriffs (ab Kl. 8, z. T. schon Kl. 7)

- Nicht mehr hauptsächlich konkrete Größen (Gewichte, Preise usw.) werden einander zugeordnet, sondern zunehmend (rationale, später reelle) Zahlen ohne konkreten Größenbezug. Dennoch sollten Beispiele, die auf konkrete Sachverhalte Bezug nehmen, nicht vernachlässigt werden.
- Zu Definitionen des Begriffs „Funktion“ in einigen Schulbüchern siehe S. 3.
- Behandelte Funktionstypen: lineare Funktionen, quadratische Funktionen, Potenzfunktionen, trigonometrische Funktionen (erst in Klasse 10)
- Darstellungen: Funktionsgleichungen, Wertetabellen, Schaubilder im Koordinatensystem

Begriffe und Sprechweisen zum Koordinatensystem

- Kartesisches Koordinatensystem (statt „Gitternetz“)
- x-Achse, y-Achse (statt „Rechtsachse“, „Hochachse“)
- Koordinatenursprung
- Koordinaten eines Punktes
- 1. – 4. Quadrant



Aufgabentypen zur Orientierung im Koordinatensystem (bereits vor Klasse 7, z. B. in Kl. 5, 6)

- Eintragen von Punkten, Ablesen der Koordinaten eingetragener Punkte
- Figuren zeichnen, z. B.:
  Zeichne das Dreieck mit den angegebenen Eckpunkten. Ergänze es zu einem Parallelogramm. Gib die Koordinaten des fehlenden Punktes D an. Gibt es mehrere Lösungen? $A(-2;-3)$, $B(4;0)$, $C(-1;2)$.

Einige wichtige Begriffe zu Funktionen

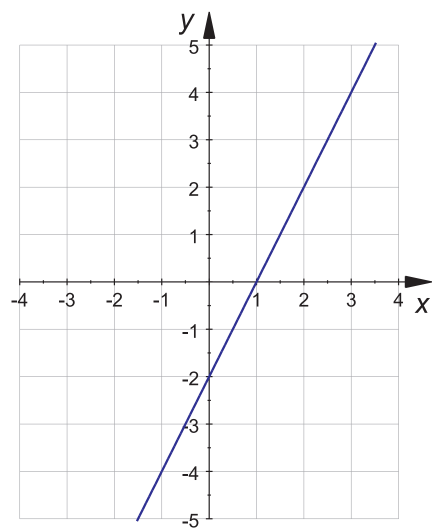
- Funktionsgleichung
- Wertetabelle
- Funktionsgraf (oder Graph? – das ist ein Streitpunkt, nach Duden ist beides erlaubt)

Unverzichtbare Grundaufgabe zu Funktionen

Zu gegebener Funktionsgleichung Wertetabelle erstellen und diese in das Koordinatensystem übertragen.

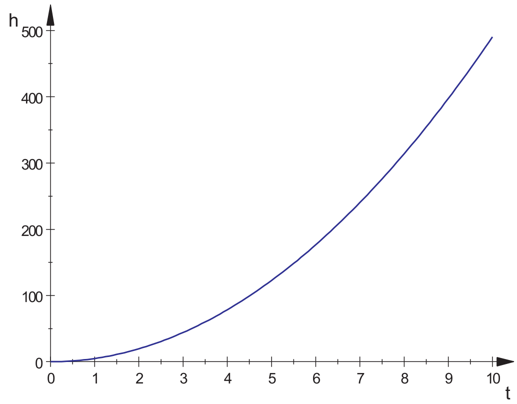
$$f(x) = 2x - 2$$

x	$f(x)$
-4	-10
-3	-8
-2	-6
-1	-4
0	-2
1	0
2	2
3	4
4	6



Weitere Aufgaben

1. Ablesen an Grafen von Funktionen
   Beispiel: Graf zum Fallgesetz
   Wie lange fällt ein Stein vom Ulmer Münster, Berliner Fernsehturm, ... ; aus welcher Höhe muss ein Stein fallen, damit er nach 2 Sekunden aufschlägt?
2. Welche der Punkte $A(*;*)$, ... liegen auf dem Grafen einer (gegebenen) Funktion?
3. In welchen Punkten schneidet der Graf der Funktion die x-Achse (y-Achse)?



6.5 Einige Bemerkungen zur Behandlung der linearen Funktionen

- Funktionsgleichungen der Form $y = m \cdot x + n$
- m – Steigung, Anstieg; n – y-Achsenabschnitt

Spezialfall: Proportionale Funktion $y = m \cdot x$

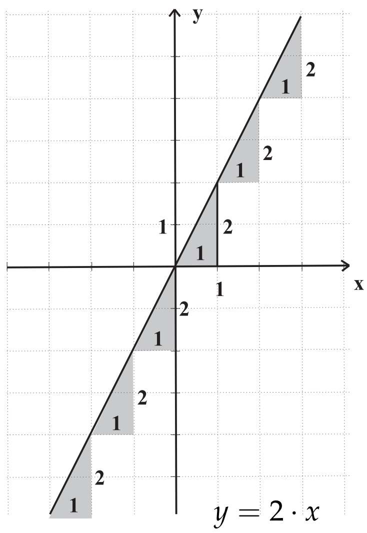
Erkenntnisse:

- Funktionsgrafen sind Geraden durch den Ursprung, der Faktor m bestimmt die „Steilheit" des Grafen.
- Bedeutung des Steigungsdreiecks, Standardform: 1 nach rechts, m nach oben (falls m negativ ist, also nach unten).
- Wächst x um 1, so nimmt der Funktionswert um m zu.

+1 +1 +1 +1 +1 +1 +1

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = 2x$	-6	-4	-2	0	2	4	6	8

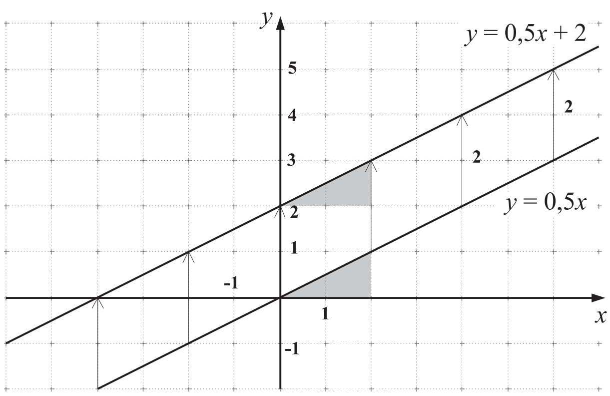
+2 +2 +2 +2 +2 +2 +2



Anmerkung:
Die Steigung ist der Tangens des Steigungswinkels, also das Verhältnis Gegenkathete zu Ankathete im Steigungsdreieck; der Tangens eines Winkels und der Steigungsbegriff werden erst in Klasse 10 in der Trigonometrie behandelt; sie können hier jedoch bereits sinnvoll vorbereitet werden.

Lineare Funktion (**allgemein:** $y = m \cdot x + n$)

x	$y = 0{,}5 \cdot x$	$y = 0{,}5 \cdot x + 2$
-4	-2	0
-3	-1,5	0,5
-2	-1	1
-1	-0,5	1,5
0	0	2
1	0,5	2,5
2	1	3
3	1,5	3,5
4	2	4



Feststellung:
Der Summand n bewirkt eine Verschiebung des Grafen von $y = m \cdot x$ um n nach oben, n ist ablesbar am Schnitt des Grafen mit der y-Achse: (y-Achsenabschnitt).

6.6 Weitere Klassen von Funktionen (Klassenstufen 9-10) – Überblick

- Quadratische Funktionen (siehe hierzu Übungsserie 6), Wurzelfunktion
- Potenzfunktionen
- Exponenentialfunktionen (siehe Aufgaben zur Vorbereitung auf die 6. Übung) und Logarithmusfunktionen (siehe unten)
- Trigonometrische Funktionen (siehe Aufgaben zur Vorbereitung auf die 6. Übung)

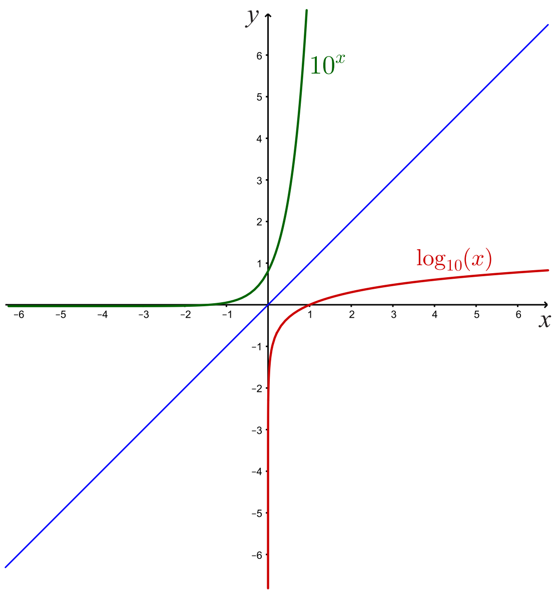
6.7 Logarithmusfunktionen

- Exponentialfunktionen (bzw. eingeschränkt auf geom. Folgen) haben vielfältige Anwendungen, vor allem Wachstumsprozesse.
- Innermathematisch besonders interessant sind Exponentialfunktionen u. a. unter dem Blickwinkel *Änderungsverhalten*, das durch die Funktionalgleichung zum Ausdruck kommt:

$$a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}$$

Logarithmusfunktion als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion

- Geometrische Betrachtungen zum Anstiegsverhalten anhand von Funktionsgraphen

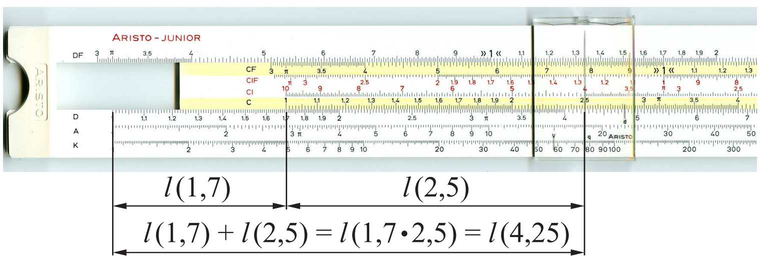


- Umkehrung anhand der Funktionalgleichung

$$\log(x_1 \cdot x_2) = \log(x_1) + \log(x_2)$$

Praktisches Operieren: Multiplizieren durch Addieren ...

... auch mittlerweile antiquiert anmutende Hilfsmittel können interessant sein und inhaltliches Verständnis unterstützen.



Menschliche Empfindungen sind logarithmisch

- **Unser Tonhöheempfinden logarithmiert die Frequenz**

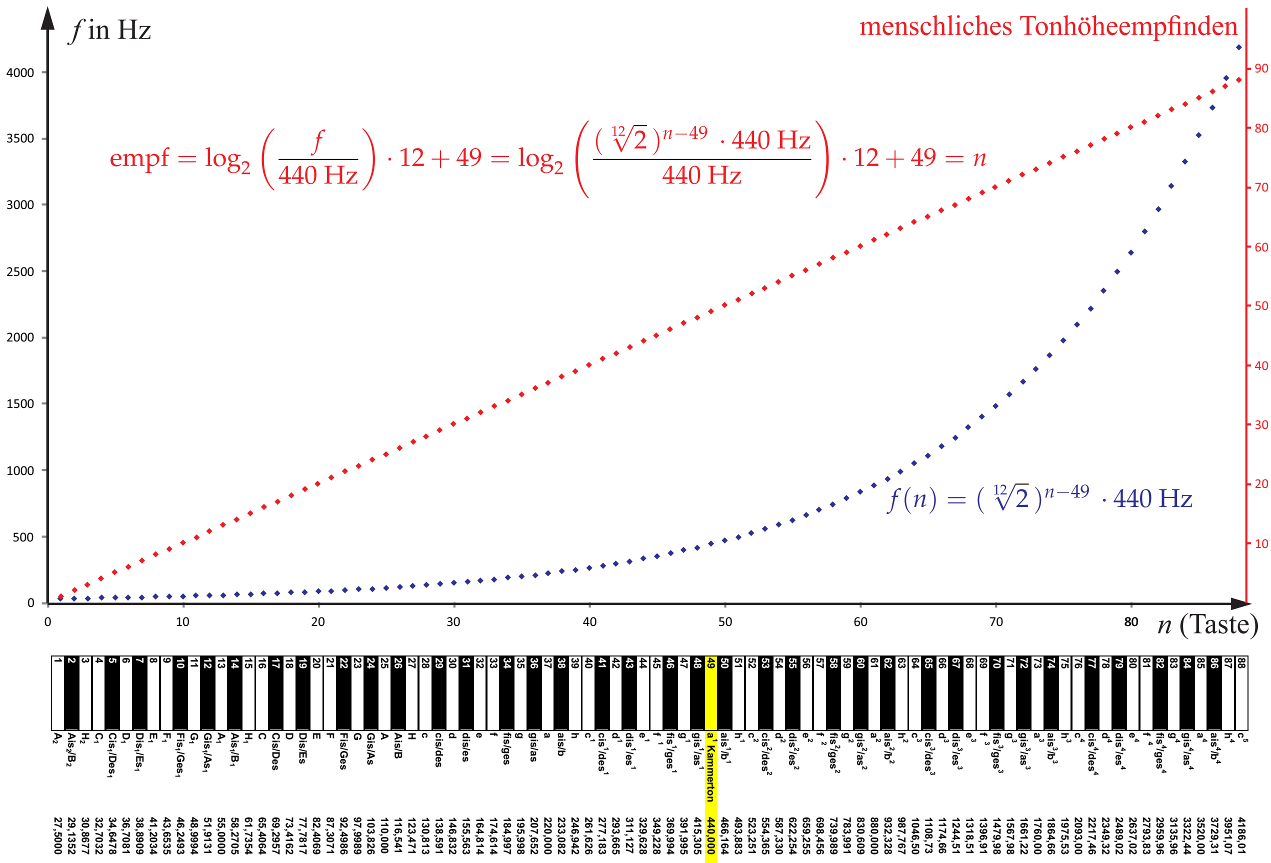
  Frequenz in Abhängigkeit von der Klaviertaste n (88 Tasten, schwarz und weiß „gleichberechtigt"):

  $$f(n) = (\sqrt[12]{2})^{n-49} \cdot 440 \text{ Hz}$$

  (Dabei hat der Kammerton A die Frequenz 440 Hz und liegt auf der 49. Taste.)

  Die Frequenz steigt also exponentiell wenn man die Tasten der Reihenfolge nach von links nach rechts anschlägt. Unser Tonhöheempfinden logarithmiert hingegen die Frequenz. Im Ergebnis wächst für uns die Tonhöhe „gleichmäßig" (linear) beim Spielen der Klaviertasten der Reihe nach vom niedrigsten zum höchsten Ton:[9]

  $$n = \log_2\left(\frac{f}{440 \text{ Hz}}\right) \cdot 12 + 49$$



- **Unser Lautstärkeempfinden logarithmiert den Schalldruck bzw. die Schallleistung**

  Der Mensch kann Schallsignale in einem extrem großen Lautstärkebereich wahrnehmen: Die Hörschwelle liegt bei einem Schalldruck von etwa $2 \cdot 10^{-5}$ Pascal (Pa) (bei einer Frequenz von 2 kHz), die Schmerzgrenze bei etwa 100 Pa, also dem Fünfmillionenfachen der Hörschwelle.

  Um diesen großen Aufnahmebereich zu verarbeiten, logarithmiert unser Lautstärkeempfinden den Schalldruck. Dadurch nehmen wir z. B. den Lärm einer Hauptverkehrsstraße in 10 m Entfernung etwa doppelt so laut wahr wie die Lautstärke einer normalen Unterhaltung in 1 Meter Entfernung, obwohl der dadurch verursachte, auf unsere Ohren wirkende Schalldruck etwa 100 mal so groß ist.

  Wie auch beim Frequenzempfinden nehmen wir additive Erhöhungen des Schalldrucks nicht gleichmäßig als Lautstärkeerhöhungen wahr: einen Anstieg von 2 Pa auf 2,01 Pa bemerken wir nicht einmal, einen Anstieg von 0,02 Pa auf 0,03 Pa hingegen durchaus.

[9] Eine „Umrechnung" in natürliche oder dekadische Logarithmen ist mittels des Logarithmengesetzes $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$, also z. B. $\log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2}$, möglich, aber an dieser Stelle nicht notwendig.

Schallquelle und Situation(Entfernung)	**Schalldruck** p	**Schalldruckpegel** L_p, bezogen auf $2 \cdot 10^{-5}$ Pa
Strahlflugzeug (in 30 m Entfernung)	600 Pa	150 dB
Schmerzschwelle	100 Pa	134 dB
Gehörschäden bei kurzfristiger Einwirkung	20 Pa	ab 120 dB
Strahlflugzeug (in 100 m Entfernung)	6 ... 200 Pa	110 ... 140 dB
Presslufthammer (1 m); Discothek	2 Pa	100 dB
Gehörschäden bei langfristiger Einwirkung-mehr als 8 Stunden täglich	0,6 Pa	ab 90 dB
Hauptverkehrsstraße (10 m)	0,2 ... 0,6 Pa	80 ... 90 dB
Pkw (10 m)	0,02 ... 0,2 Pa	60 ... 80 dB
Fernseher in Zimmerlautstärke (1 m)	0,02 Pa	ca. 60 dB
normale Unterhaltung (1 m)	2 ... $6{\cdot}10^{-3}$ Pa	40 ... 50 dB
sehr ruhiges Zimmer	2 ... $6{\cdot}10^{-4}$ Pa	20 ... 30 dB
Blätterrauschen, ruhiges Atmen	$6{\cdot}10^{-5}$ Pa	10 dB
Hörschwelle bei 1 kHz	$2{\cdot}10^{-5}$ Pa	0 dB

Man kann etwa davon ausgehen, dass (bei Geräuschen gleichen Frequenzspektrums) eine Erhöhung des Schalldrucks um den gleichen Faktor als gleiche (additive) Zunahme der Lautstärke empfunden wird:[10]

Lautheit(Faktor · Schalldruck 1) = Lautheit(Schalldruck 1) + Summand(Faktor)

Dies erinnert an die Funktionalgleichung der Logarithmusfunktion(en). Daher wurde der *Schalldruckpegel* (L_p) als Maß für die Lautstärke (bei gleicher Frequenz und mit den in der Fußnote [10] genannten Einschränkungen) als logarithmische Größe (mit der Einheit Dezibel bzw. dB) eingeführt:

$$L_p = 20 \log_{10}\left(\frac{p}{p_0}\right) \text{ dB} = 10 \log_{10}\left(\frac{p^2}{{p_0}^2}\right) \text{ dB}^{11}$$

Der Bezugswert p_0 (für Luftschall) wurde Anfang des 20. Jh. auf $p_0 = 20\,\mu\text{Pa} = 2 \cdot 10^{-5}$ Pa festgelegt. Diesen Schalldruck hielt man für die Hörschwelle des menschlichen Gehörs bei der Frequenz 1 kHz.[12]

Legt man für die obige Funktion L_p eine Wertetabelle an, so erkennt man das für Logarithmusfunktionen charakteristische Änderungsverhalten:

$\xrightarrow{\cdot\sqrt{10}}$ $\xrightarrow{\cdot\sqrt{10}}$ $\xrightarrow{\cdot\sqrt{10}}$ $\xrightarrow{\cdot\sqrt{10}}$ $\xrightarrow{\cdot\sqrt{10}}$ $\xrightarrow{\cdot\sqrt{10}}$ $\xrightarrow{\cdot\sqrt{10}}$ $\xrightarrow{\cdot\sqrt{10}}$

p in Pa	$2{\cdot}10^{-5}$	$\approx 6{\cdot}10^{-5}$	$2{\cdot}10^{-4}$	$\approx 6{\cdot}10^{-4}$	$2{\cdot}10^{-3}$	$\approx 6{\cdot}10^{-3}$	$2{\cdot}10^{-2}$	$\approx 6{\cdot}10^{-2}$	$2{\cdot}10^{-1}$	...
L_p in dB	0	10	20	30	40	50	60	70	80	...

$\xrightarrow{+10}$ $\xrightarrow{+10}$ $\xrightarrow{+10}$ $\xrightarrow{+10}$ $\xrightarrow{+10}$ $\xrightarrow{+10}$ $\xrightarrow{+10}$ $\xrightarrow{+10}$

Liest man diese Tabelle nun von unten nach oben (betrachtet also den Schalldruck als Funktion des Schalldruckpegels), so wird das für Exponentialfunktionen typische Änderungsverhalten sichtbar. Eine solche exponentielle Kennlinie hat jeder gebräuchliche Lautstärkeregler:

[10] Bemerkung: Die realen Verhältnisse beim Lautstärkeempfinden sind allerdings noch komplexer, da dieses nicht nur vom Schalldruck, sondern auch vom Frequenzspektrum des Geräusches abhängig ist. Schallsignale mit gleichem Schalldruckpegel aber unterschiedlichem Frequenzspektrum und Zeitverhalten führen zu sehr unterschiedlichen wahrgenommenen Lautheiten. Dies wird durch die Größe „Lautheit“ (in Sone) berücksichtigt, siehe https://de.wikipedia.org/wiki/Sone.

[11] Die Festlegung $L_p = 10 \log_{10}\left(\frac{p^2}{{p_0}^2}\right)$ dB kommt dadurch zustande, dass die Schallleistung P proportional zum Quadrat des Schalldrucks p ist. Somit ist $L_p = 10 \log_{10}\left(\frac{P}{P_0}\right)$ dB $= \log_{10}\left(\frac{P}{P_0}\right)$ Bel (1 Bel = 10 Dezibel). 1 Bel (bzw. 10 dB) entspricht daher einem Leistungsverhältnis von 10 : 1 und einem Schalldruckverhältnis von $\sqrt{10}$: 1. 20 dB geben ein Schalldruckverhältnis von 10 : 1 an.

[12] Zwar stellte sich später heraus, dass dieser Wert für 1 kHz etwas zu niedrig angesetzt war, dennoch wurde er als Referenzwert p_0 beibehalten.

Damit wir Änderungen der Lautstärke beim Drehen eines Lautstärkereglers als gleichmäßig empfinden, muss der Regler durch ein exponentielles Verhalten das Logarithmieren durch unser Empfinden kompensieren. Somit verhält sich der Lautstärkeregler wie ein Klavier, in dem Sinne, dass er das logarithmische Verhalten der menschlichen Sinne durch eine exponentielle Kennlinie „linearisiert".

- **Wir logarithmieren noch viel mehr: Weber-Fechner-Gesetz**

  So wie das Lautheitsempfinden logarithmisch vom Schalldruck abhängt, logarithmiert unser *Helligkeitsempfinden* die Lichtstärke (I), sodass wir auch Lichtstärken in einem sehr großen Bereich wahrnehmen und verarbeiten können. Ähnliches gilt für den *Geschmackssinn*: Die Konzentration von Geschmacksstoffen muss um 10 bis 20 Prozent steigen, damit der Geschmack als stärker empfunden wird.

  Allgemein formulierte 1834 der Physiologe Ernst Heinrich Weber, dass ein Sinnesorgan ab einem bestimmten Intensitätsbetrag eine Veränderung registriert, die als Unterschied ΔR zum vorangehenden Reiz R in einem bestimmten, gleich bleibenden Verhältnis k zu diesem steht (*Webersches Gesetz*):

  $$k = \frac{\Delta R}{R} \, .$$

  Gustav Theodor Fechner formulierte das Webersche Gesetz 1860 so, dass Empfindungsänderungen (ΔE) proportional zu $\frac{\Delta R}{R}$ sind:

  $$\Delta E = c \cdot \frac{\Delta R}{R}$$

  Lässt man ΔR (und damit ΔE) gegen Null streben, so erhält man $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}R} = c \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}R}$ und daraus durch Integration nach R das *Weber-Fechnersche Gesetz*:

  $$E = c \cdot \ln \frac{R}{R_0}$$

  R_0 ist dabei eine Integrationskonstante, die den Schwellenreiz (z. B. die Hörschwelle) angibt.