

Zusammenfassende Notizen zur Vorlesung

Einführung in die Mathematikdidaktik und Didaktik der Geometrie Teil 1

Vorlesungsinhalte

Die Vorlesung behandelt ausgewählte allgemeine Prinzipien der Mathematikdidaktik wobei exemplarisch Beispiele herangezogen werden, die sich vor allem auf den Unterricht in der Sekundarstufe I, in einigen Fällen auch auf die Primarstufe und auf die S II beziehen. Die Beispiele stammen vor allem aus dem Geometrieunterricht, aber auch Themen aus anderen Bereichen des Mathematikunterrichts werden herangezogen. Systematisch wird auf die Didaktik der Geometrie (in der Sekundarstufe I) eingegangen. Weitere Vorlesungen – die auf dieser Einführungsvorlesung aufbauen – befassen sich dann systematisch mit der Didaktik der Algebra und Zahlentheorie, mit der Didaktik der Stochastik sowie mit der Didaktik der Analysis und der Analytischen Geometrie/ Linearen Algebra.

- Ziele und Leitideen des Mathematikunterrichts; Spezifika des Geometrieunterrichts
- Ausgewählte lerntheoretische Grundlagen und daraus resultierende Prinzipien für den Mathematikunterricht
- Anwendungen und Modellbildung im Mathematikunterricht
- Mathematik als „Welt eigener Art“ erfahren
- Begriffslernen und Begriffslehren (speziell in der Geometrie)
- Beweisen und Argumentieren (speziell in der Geometrie)
- Konstruieren
- Körpergeometrie
- Trigonometrie
- Problemlösen im Mathematikunterricht (mit Schwerpunkt Geometrie)
- Prozessbezogene Aspekte; Unterrichtsmethoden

Literaturempfehlungen

Mathematikdidaktische Literatur (allgemein)

- BRUDER; HEFENDEHL-HEBEKER; SCHMIDT-THIEME; WEIGAND (Hrsg.): *Handbuch der Mathematikdidaktik*. Springer Spektrum: Berlin, Heidelberg, 2015.
- FREUDENTHAL, H.: *Mathematik als pädagogische Aufgabe*, Bände 1 und 2. Klett: Stuttgart, 1973.
- FÜHRER, L.: *Pädagogik des Mathematikunterrichts*. Vieweg: Braunschweig/Wiesbaden, 1997.
- REISS, K.; HAMMER, CH.: *Grundlagen der Mathematikdidaktik*. Birkhäuser: Basel, 2013.
- VOLLRATH, H.-J.; ROTH, J.: *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe*. Spektrum: Heidelberg, 2011 (2. Aufl.).
- WINTER, H.: *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht*. Vieweg: Braunschweig/Wiesbaden, 1989 (3. Aufl. 2015).
- WITTMANN, E. CH.: *Grundfragen des Mathematikunterrichts*. Vieweg: Braunschweig/Wiesbaden, 1981 (6. Aufl., Nachdruck 2009).
- Schulbücher, Zeitschriften, ...

Literatur zur Didaktik der Geometrie

- HOLLAND, G.: *Geometrie in der Sekundarstufe*. Heidelberg: Spektrum, 1996 (2. Aufl.).
- KADUNZ, G.; STRÄSSER, R.: *Didaktik der Geometrie in der Sekundarstufe I*. Hildesheim: Franzbecker, 2007.

WEIGAND, H.-G. et al.: *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I*. Heidelberg: Springer/ Spektrum, 2009 (3. Aufl.: 2018).

Tagungsbände des Arbeitskreises Geometrie in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik:
<http://www.ak-geometrie.de>

Schulbücher, Zeitschriften, ... Hinweise auf weitere Literaturquellen zu bestimmten Themen werden in der Vorlesung gegeben.

Relevante staatliche Vorgaben

KMK 2003: *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss*.

<http://www.kmk.org/bildung-schule/qualitaetssicherung-in-schulen/bildungsstandards/dokumente.html>

KMK 2004: *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich* (siehe die o. a. Internetseite).

KMK 2012: *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife*

http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf

Rahmenlehrplan des Landes Berlin für das Fach Mathematik, Klassen 1-10 (gültig ab 2017):

<http://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/rlp-online/c-faecher/mathematik/>

1 Ziele und Leitideen des Mathematikunterrichts; Spezifika des Geometrieunterrichts

1.1 Grunderfahrungen des Mathematikunterrichts

Mathematikunterricht in allgemeinbildendem Sinne ist nach HEINRICH WINTER durch drei *Grunderfahrungen* gekennzeichnet:¹

- (G1) „Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,
- (G2) mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formen, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,
- (G3) in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinaus gehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben.“

1.2 Allgemeine mathematische Kompetenzen in den Bildungsstandards und den Rahmenlehrplänen

In den Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz (KMK) und in den Berliner Rahmenlehrplänen (RLP) werden anstelle von Unterrichtszielen mathematische Kompetenzen benannt. Es werden zwei Dimensionen mathematischer Kompetenzen unterschieden:

- allgemeine (bzw. prozessbezogene) mathematische Kompetenzen,²
- inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen (Leitideen).

¹WINTER, H.: Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In: *Mitteilungen der GDM* 61 (1995), S. 37-46.

²Die allgemeinen mathematischen Kompetenzen weisen starke Analogien zu den *allgemeinen Lernzielen für den Mathematikunterricht* auf, die bereits 1975 von HEINRICH WINTER formuliert wurden:

1. Kreativ sein / schöpferisches Tätigsein,
2. Argumentieren (einschließlich Beweisen),
3. Mathematisieren,
4. Formalisieren (bzw. Formulieren bzw. Darstellen).

Allgemeine mathematische Kompetenzen

Kompetenzen für den Primarbereich

(nach den KMK-Bildungsstandards von 2004)

- Problemlösen
- Argumentieren
- Modellieren
- Darstellen von Mathematik
- Kommunizieren

Kompetenzen für die Sekundarstufen I und II

(nach KMK-Bildungsstandards für den MSA von 2003 und für die Allgemeine Hochschulreife 2012)

- Probleme mathematisch lösen
- Mathematisch argumentieren
- Mathematisch modellieren
- Mathematische Darstellungen verwenden
- Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen
- Kommunizieren

Einige Stichpunkte zu den allgemeinen mathematischen Kompetenzen (KMK-Standards MSA)

1.2.1 Probleme mathematisch lösen

- Vorgegebene und selbst formulierte Probleme bearbeiten
- Geeignete heuristische Hilfsmittel, Strategien und Prinzipien auswählen und anwenden
- Plausibilität der Ergebnisse überprüfen; Lösungsideen und Lösungswege reflektieren


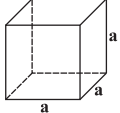
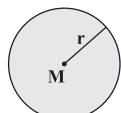
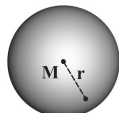
Schüleraktivitäten zum Problemlösen/ schöpferischen Tätigsein³

- Beobachten; bewusstes Suchen nach Gesetzmäßigkeiten, Symmetrien, Invarianten
- Herstellen von Figuren und Situationen
- Schematisieren einer komplexen Situation
- Klassifizieren
- Anordnen und Umstrukturieren
- Aufsuchen von Entsprechungen (Analogisieren)
- Verallgemeinern und spezialisieren
- Entwerfen und verwerfen; vermuten und prüfen
- Variieren
- Bedenken von Alternativen
- Zerlegen und Zusammensetzen – Analyse und Synthese

Beispiel zum Analogisieren: Kugelvolumen

Aufstellen einer Vermutungen aufgrund bekannter Sachverhalte,

Überprüfen der Vermutung

Flächeninhalte	Rauminhalte (Volumina)
<p>Quadrat mit der Seitenlänge a</p>  <p>$A =$</p>	<p>Würfel mit der Seitenlänge a</p>  <p>$V =$</p>
<p>Kreis mit dem Radius r</p>  <p>$A =$</p>	<p>Kugel mit dem Radius r</p>  <p>$V =$</p>

1.2.2 Mathematisch argumentieren

- Fragen stellen, die für die Mathematik charakteristisch sind („Gibt es ...?“ , „Wie verändert sich ...?“ , „Ist das immer so?“) und Vermutungen begründet äußern
- Mathematische Argumentationen entwickeln (wie Erläuterungen, Begründungen, Beweise)
- Lösungswege beschreiben und begründen

³ Stampe, E.: Repetitorium Fachdidaktik Mathematik. Verlag Julius Klinkhardt, Bad Heilbrunn/Obb., 1984

Schüleraktivitäten zum rationalen Argumentieren

- Begriffe abgrenzen (definieren)
- Begriffe miteinander vergleichen
- Lösungswege analysieren
- Lösungen testen und kontrollieren
- Behauptungen anzweifeln
- Sätze analysieren
- Logische Abhängigkeiten prüfen – lokales Ordnen
- Sätze beweisen und Scheinbeweise entlarven
- Beweise zergliedern und auf Vollständigkeit prüfen
- Systematisieren

Beispiel für Beweisen / Lokales Ordnen: Innenwinkelsumme im Dreieck

Voraussetzung: α , β und γ sind Innenwinkel des Dreiecks ABC

Behauptung: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

Beweis: - Wir zeichnen / betrachten die Parallele zu AB durch den Punkt C .
 - Sind δ und ε die Winkel, welche diese Parallele mit BC bzw. AC bildet, so gilt:
 $\varepsilon + \delta + \gamma = 180^\circ$ (Nebenwinkelsatz),
 $\delta = \beta$ (Wechselwinkelsatz) und
 $\varepsilon = \alpha$ (Stufenwinkelsatz).
 - Also gilt: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, was zu beweisen war.

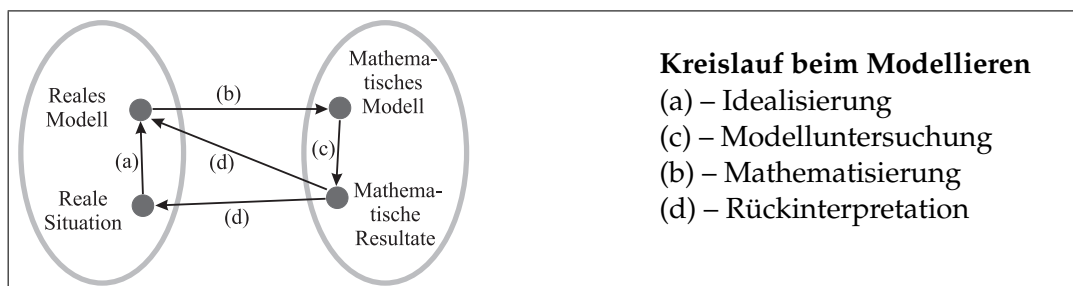
Beispiel für „Scheinbeweise entlarven“:

$$\begin{aligned}
 16 - 36 &= 25 - 45 \\
 \Rightarrow 16 - 36 + \frac{81}{4} &= 25 - 45 + \frac{81}{4} \\
 \Rightarrow \left(4 - \frac{9}{2}\right)^2 &= \left(5 - \frac{9}{2}\right)^2 \\
 \Rightarrow 4 - \frac{9}{2} &= 5 - \frac{9}{2} \\
 \Rightarrow 4 &= 5 \qquad \text{q.e.d}
 \end{aligned}$$

1.2.3 Mathematisch kommunizieren

- Überlegungen, Lösungswege bzw. Ergebnisse dokumentieren, verständlich darstellen und präsentieren, auch unter Nutzung geeigneter Medien
- Die Fachsprache adressatengerecht verwenden
- Äußerungen von anderen und Texte zu mathematischen Inhalten verstehen und überprüfen

1.2.4 Mathematisch modellieren



1.2.5 Mathematische Darstellungen verwenden

- Verschiedene Formen der Darstellung von mathematischen Objekten und Situationen anwenden, interpretieren und unterscheiden
- Beziehungen zwischen Darstellungsformen erkennen
- Darstellungsformen je nach Situation und Zweck auswählen und zwischen ihnen wechseln

1.2.6 Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen

- Mit Variablen, Termen, Gleichungen, Funktionen, Diagrammen, Tabellen arbeiten
- Symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache übersetzen und umgekehrt
- Lösungs- und Kontrollverfahren ausführen
- Mathematische Werkzeuge (Taschenrechner, Software, ...) sinnvoll und verständlich einsetzen

Schüleraktivitäten zum Erwerb formaler Fertigkeiten

- Unterscheiden von Zeichen und Bezeichnungen
- Artikulation der Beziehungen zwischen Gegenstands- und Sprachbereich
- Übertragen von Sachverhalten des Gegenstandsbereichs in den Zeichenbereich (Codieren)
- Ausdeuten von sprachlichen Gebilden bzw. Symbolen (Decodieren)
- Handhaben von Variablen, Termen, Gleichungen
- Aufbau von Algorithmen
- Ausführen algorithmischer Prozesse und Interpretation der Lösungen
- Formales Ableiten
- Erfahrungen zur Grenze algorithmischer Vorgehensweisen

Anmerkung:

Vor dem „Hantieren“ mit Symbolen und Formeln muss das Verständnis ihrer inhaltlichen Bedeutung stehen – auf allen Stufen:

$$7 \quad a \cdot x = b \quad \Leftrightarrow \text{(bzw.: „gdw.“)}$$

Anmerkung:

Formales Abarbeiten von Algorithmen dominiert immer noch viel zu stark den deutschen Mathematikunterricht (siehe TIMMS; PISA)

1.2.7 Anmerkungen zum algorithmischen Arbeiten

Algorithmus:

Folge von Anweisungen (Rechenschritten), die einen Prozess definieren, der mit gewissen Dateneingaben beginnt und nach endlicher Zeit ein durch die Eingabedaten eindeutig bestimmtes Resultat liefert.

Merkmale von Algorithmen:

1. Algorithmen bestehen aus endlich vielen Schritten. Dabei enthält jeder Schritt eine unmissverständliche Anweisung.
2. Es gibt einen eindeutig bestimmten Schritt, der als erster auszuführen ist. Nach jedem Schritt steht fest, ob ein Algorithmus beendet ist, bzw. welcher Schritt als nächster auszuführen ist.
3. Algorithmen sind für alle Werte eines Grundbereiches ausführbar.

- Beispiele:**
- Schriftliche Rechenverfahren
 - Geometrische Konstruktionen
 - Euklidischer Algorithmus
 - Gauss-Algorithmus

Das Abarbeiten von Rechenvorschriften, Einsetzen in vorgegebene Formeln und Ausrechnen wird als algorithmisches bzw. kalkülmäßiges Arbeiten bezeichnet.

- Gegensatzpaare:**
- Inhaltliches Lösen von Gleichungen \Leftrightarrow Kalkülmäßiges Lösen
 - Finden von Werten durch funktionale Überlegungen (Proportionalität) \Leftrightarrow Einsetzen von Werten in den Dreisatz

- Schüler erleben (hoffentlich) u. a. beim Lösen von Gleichungen, dass man immer wiederkehrende formale Aufgaben auf algorithmische Weise sicher und schnell lösen kann.
- Das Aufstellen von Algorithmen ist natürlich mathematisch interessanter als das Abarbeiten.

Beispiel: Nimm eine natürliche Zahl $n > 0$, starte erst einmal mit einer Zahl kleiner als 20.

Collatz-Zahlen Unterwirf deine Zahl folgendem Algorithmus (Verfahren):

- Wenn n ungerade, dann ersetze n durch $3n + 1$.
- Wenn n gerade, dann ersetze n durch $\frac{n}{2}$.

Unterwirf den neuen Wert von n demselben Verfahren. Mache immer weiter, bis du merkst, dass nichts Neues mehr passiert.

Was stellst du fest? Nimm eine neue Zahl und prüfe, ob dasselbe Ergebnis eintritt.

1.3 Inhaltsbezogene Kompetenzen (Leitideen)

„Leitideen“ sind immer wieder auftretende Themenbereiche/ Kategorien (oder eben „Ideen“), die im Laufe der Schulzeit mehrfach (jeweils auf höherer Stufe) aufgegriffen werden. Die Gliederung nach Leitideen entspricht somit einer längsschnittorientierten Betrachtung des Unterrichts.

Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen in der Grundschule

(nach den Bildungsstandards der KMK (2004) für den Primarbereich sowie dem Berliner Rahmenlehrplan für die Grundschule, 2004)

- Zahlen und Operationen
- Raum und Form (B-RLP: Form und Veränderung)
- Muster und Strukturen (nur in den KMK-Standards)
- Größen und Messen
- Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit (B-RLP: Daten und Zufall)

Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen in den Sekundarstufe I und II

(nach den Bildungsstandards der KMK (2004, 2012) und den Berliner RLP)

- Leitidee Zahl
- Leitidee Messen
- Leitidee Raum und Form
- Leitidee Funktionaler Zusammenhang
- Leitidee Daten und Zufall

1.4 Anmerkungen zu Leitideen im Mathematikunterricht

- Das Konzept der Leitideen (zentraler fundamentaler, universeller, ... Ideen) wurde 1929 von WHITEHEAD herausgearbeitet.

Ideen halten sich nicht. Es muss etwas mit ihnen getan werden. (A. N. WHITEHEAD)

„Die Schüler stehen ratlos vor einer Unmenge von Einzelheiten, die weder zu großen Ideen noch zu alltäglichem Denken eine Beziehung erkennen lassen. Diese Art von Schulung in der Richtung des Erwerbs von noch mehr Einzelheiten auszudehnen, ist das Letzte, was man im Interesse der Bildung wünschen sollte.“

„Diese Wissenschaft, wie sie jungen Schülern dargeboten ... muss sich offenkundig auf unmittelbare und einfache Weise mit einigen wenigen allgemeinen Ideen von weitreichender Bedeutung befassen.“

A. N. WHITEHEAD

- Die NCTM-Standards (National Council of Teachers of Mathematics, USA) hatten Einfluss auf die Diskussion in Deutschland.

Standards zu Inhalten	Standards zu Prozessen
<ul style="list-style-type: none"> • Zahl und Verknüpfung • Algebra (einschließlich Funktionen, Muster) • Geometrie • Messen (einschließlich Größen) • Datenanalyse und Wahrscheinlichkeit 	<ul style="list-style-type: none"> • Problemlösen • Begründen und Beweisen • Kommunizieren • Verbindungen (einschließlich Vernetzen, Anwenden, Begriffsbilden) • Repräsentieren (einschließlich Darstellen, Modellieren)

1.5 Spezifische Leitideen für den Geometrieunterricht

1.5.1 Leitidee Raum und Form

Figuren und Körper, deren Charakterisierung, Eigenschaften und Beziehungen sowie der Umgang mit diesen Objekten stehen im Mittelpunkt des gesamten Geometrieunterrichts. Insbesondere:

- Figuren und Körper in der Umwelt erkennen, beschreiben und charakterisieren;
- Körper auf unterschiedliche Weise darstellen: Schrägbild, Netz, Modell;
- Beziehungen zwischen Figuren und Körpern beschreiben und begründen: Symmetrie, Kongruenz, Ähnlichkeit;
- Sätze der ebenen Geometrie bei Konstruktionen, Berechnungen und Beweisen anwenden: Kongruenzsätze, Satz des Thales, Satz des Pythagoras.

1.5.2 Leitidee Messen (unvollständig)

Die Schülerinnen und Schüler

- nutzen das Grundprinzip des Messens, insbesondere bei der Längen-, Flächen- und Volumemessung, ...
- wählen Einheiten von Größen situationsgerecht aus ... ,
- berechnen Flächeninhalt und Umfang von Rechteck, Dreieck und Kreis sowie daraus zusammengesetzten Figuren,
- berechnen Volumen und Oberflächeninhalt von Prisma, Pyramide, Zylinder, Kegel und Kugel sowie daraus zusammengesetzten Körpern,
- berechnen Streckenlängen u. Winkelgrößen, auch unter Nutzung von trigonometrischen Beziehungen u. Ähnlichkeitsbeziehungen

1.5.3 Leitidee Funktionaler Zusammenhang

Funktionen sind zentrale Elemente in der Algebra und der Analysis. Funktionale Zusammenhänge lassen sich aber auch in der Geometrie in vielfacher Weise aufzeigen:

- Spiegelungen, Drehungen und Verschiebungen sind Funktionen;
- Flächeninhalts- und Volumenformeln lassen sich als Funktionen mehrerer Veränderlicher ansehen;
- Beim rechtwinkligen Dreieck ist die Seitenlänge der Hypotenuse eine Funktion der beiden Kathetenlängen;
- Bei gegebenem Flächeninhalt eines Rechtecks ist eine Seitenlänge eine Funktion der anderen Seitenlänge.

1.6 Allgemeine Ziele des Geometrieunterrichts, Aspekte von Geometrie in der Schule

Aus den *Grunderfahrungen der mathematischen Bildung* (nach HEINRICH WINTER, siehe oben) ergeben sich die folgenden allgemeinen Ziele für den Geometrieunterricht.

1.6.1 Allgemeine Ziele des Geometrieunterrichts

1. Mit Hilfe der Geometrie die (Um-)Welt erschließen
2. Geometrie und die Grundlagen wissenschaftlichen Denkens und Arbeitens kennen lernen
3. Mit Geometrie Problemlösen lernen

1.6.2 Stellung der Geometrie in der Schule

1. Geometrie als Lehre vom Anschauungsraum
2. Geometrie als Beispiel einer deduktiven Theorie
3. Geometrie als Übungsfeld im Problemlösen
4. Geometrie als Vorrat mathematischer Strukturen⁴

⁴nach HOLLAND, G.: *Geometrie in der Sekundarstufe*. Heidelberg: Spektrum, 1996 (2. Aufl.).