Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät
Institut für Mathematik
Prof. Dr. A. Filler

Wintersemester 2019/20

Zusammenfassende Notizen zur Vorlesung

Einführung in die Mathematikdidaktik und Didaktik der Geometrie
Teil 4

4 Anwendungen und Modellbildungen im Mathematikunterricht

Mathematische Anwendungen treten in sehr vielen Berufs- und Alltagssituationen auf. Der Mathematikunterricht kann unmöglich unmittelbar (z. B. durch einschlägige Anwendungsaufgaben) auf die Mehrheit zu erwartender Anwendungskontexte vorbereiten.

„Funktionale mathematische Bildung ist die Fähigkeit, mathematische Konzepte auch in einem vom ursprünglichen Lernkontext abweichenden inner- oder außermathematischen Kontext zu aktivieren."

(LEUDERS, T.: *Mathematik Didaktik*. Cornelsen Scriptor, Berlin, 2003, S. 52)

4.1 Funktionen des Sachrechnens nach Winter

HEINRICH WINTER formulierte drei grundlegende Funktionen des Sachrechnens;[1] er hatte dabei zwar primär die Grundschule im Blick, aber auch für die Sekundarstufen sind diese Überlegungen von Bedeutung.

1. Sachrechnen als **Lernstoff**:

   Immer schon gehörten dazu die „bürgerlichen Größen" Stückzahlen, Geldwerte, Längen, Zeitspannen, Massen, Flächen- und Rauminhalte. Auch grundlegende physikalische Größen (z. B. Geschwindigkeit, Energie, Leistung, Dichte) sind für den Mathematikunterricht relevant, als „Lernstoff" treten sie jedoch im Physikunterricht auf. Unter „Sachrechnen als Lernstoff" sind auch Prozent- und Zinsrechnung einzuordnen. Auch Verfahren und Begriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Statistik sind zu nennen.

2. Sachrechnen als **Lernprinzip**:

   Der Bezug zur Erfahrungswelt der Schüler kann in mindestens dreifacher Weise im Unterricht nützlich sein:

   - Sachsituationen als Einstiege in Lernprozesse (z. B. Bruchrechnung);
   - Veranschaulichung mathematischer Begriffe durch ihre Verkörperung in Sachsituationen (auch hierfür finden sich sich Beispiele in der Bruchrechnung, beim Rechnen mit rationalen Zahlen usw.);
   - Sachaufgaben als „Trainingslager" für mathematische Begriffe und Verfahren.

3. Sachrechnen als **Lernziel** (Befähigung zur Erschließung der Umwelt):

   „Dies ist die umfassendste Funktion des Sachrechnens, in ihr sind die vorgenannten (Sachrechnen als Lernstoff und als Lernprinzip) aufgehoben. Es ist auch die wichtigste und unterrichtspraktisch am schwierigsten zu verwirklichende Funktion."[2]

   Die Sache steht bei dieser Funktion (mit) im Vordergrund. Unter diese Funktion des Sachrechnens ordnet sich auch die mathematische Modellierung ein. Durch das Durchlaufen eines Modelbildungskreislaufes (siehe Abschnitt 4.3, S. 4) sollen Sachsituationen klarer, bewusster und auch kritischer betrachtet werden.

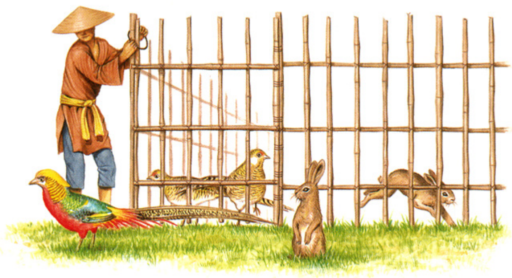
Diese Funktionen sind natürlich nicht strikt voneinander zu trennen, sie „überlappen" vielmehr.

[1] Winter, H.: *Sachrechnen in der Grundschule*. Bielefeld: CVK, 1985 (wurde mehrfach neu aufgelegt, zuletzt 2003).
[2] ebd., S. 31

4.2 Zwei Beispiele zu linearen Gleichungssystemen

4.2.1 Eine einfache (und vielleicht deplatzierte?) Aufgabe

Ein Schulbuch[3] verwendet die folgende Aufgabe als Einstiegsbeispiel für „Anwendungsaufgaben zu linearen Gleichungssystemen“.



Aus einem alten chinesischen Mathematikbuch („Arithmetik des Kuitschang“, 2600 v. Chr.) stammt folgende Aufgabe: In einem Käfig sind Kaninchen und Fasanen. Die Tiere haben zusammen 35 Köpfe und 94 Füße. Wie viele Kaninchen und wie viele Fasanen sind im Käfig? Stelle zur Lösung des Problems eine Gleichung für die Anzahl der Köpfe und eine Gleichung für die Anzahl der Füße auf und löse das Gleichungssystem.

- Ist dieses Beispiel sinnvoll? Was spricht dafür, was dagegen?
- Handelt es sich um eine „echte“ Anwendung?
- Welche der drei Funktionen(en) des Sachrechnens kann (können) bei der Bearbeitung der Aufgabe zum Tragen kommen?
- Sollten Schüler dazu angehalten werden, derartige Aufgaben mit Hilfe linearer Gleichungssysteme zu lösen?
- Kann das Beispiel dazu dienen, die Bearbeitung von Textaufgaben zu erlernen?

4.2.2 Schritte für das Lösen von Textaufgaben, die zu Gleichungen oder Gleichungssystemen führen

Die folgenden Schritte sind für Schüler formuliert, sie wurden einem Schulbuch entnommen.

1. Lege für die gesuchten Größen die Gleichungsvariablen fest.
2. Übersetze die Angaben aus dem Text in Terme.
3. Stelle die Gleichungen auf.
4. Löse das Gleichungssystem.
5. Überprüfe das Ergebnis am Text.
6. Schreibe das Ergebnis auf.

Diese Schritte sind für das Lösen von Sachaufgaben, die auf lineare Gleichungssysteme führen, ein guter Anhaltspunkt. Sie sollten aber nicht generalisiert werden – je nach der Anwendungssituation und ihrer Mathematisierung können auch andere Schritte sinnvoll sein. Ein bedeutsamer Schritt, der am Anfang des Lösens jeder Textaufgabe stehen muss, fehlt in der obigen Aufgabe allerdings: aufmerksames ***Lesen und Verstehen der Aufgabe***.

4.2.3 Ein weiteres Beispiel: Mischungsaufgabe

Aus zwei Gold-Silber-Legierungen, in denen sich die Metallmassen wie 2 : 3 bzw. wie 3 : 7 verhalten, sind 8 kg einer neuen Legierung mit dem Verhältnis 5 : 11 herzustellen. Wie viel Kilogramm der Legierungen sind dabei zu verwenden?

0. Lesen und Verstehen der Aufgabe
    - In der ersten Legierung verhält sich die Gold- zur Silbermasse wie 2 : 3, d. h. ein Kilogramm der Legierung enthält 2/5 kg Gold und 3/5 kg Silber.
    - Ein Kilogramm der zweiten Legierung enthält 3/10 kg Gold und 7/10 kg Silber.
    - Ein Kilogramm der durch Mischung herzustellenden Legierung soll 5/16 kg Gold und 11/16 kg Silber enthalten.
    - Es sollen 8 kg der neuen Legierung hergestellt werden, dort müssen also 40/16 kg Gold und 88/16 kg Silber enthalten sein.

[3] Maroska et al.: *Schnittpunkt 8*. Stuttgart: Klett, 2004.

1. Festlegen der Variablen: *Worauf kann Einfluss genommen werden, was ist gesucht?*

   Beim Mischen ist zu entscheiden, welche Masse der ersten Legierung und welche Masse der zweiten Legierung verwendet werden. Entsprechend werden die Variablen festgelegt:

   - x – benötigte Masse (in kg) der ersten Legierung
   - y – benötigte Masse (in kg) der zweiten Legierung

2. Übersetzung der Angaben aus dem Text in Terme

   Hier kommt es nun maßgeblich darauf an, wie gut die Aufgabe gelesen und analysiert wurde. Die Terme geben an, wieviel kg Silber und wieviel kg Gold die Mischung enthält, wenn x kg der ersten und y kg der zweiten Legierung gemischt werden:

   - gesamte Goldmasse: $\frac{2}{5}x + \frac{3}{10}y$
   - gesamte Silbermasse: $\frac{3}{5}x + \frac{7}{10}y$

3. Aufstellen von Gleichungen

   In diesem Beispiel ist es vom Aufstellen der Terme zum Aufstellen der Gleichungen nur noch ein kleiner Schritt, wenn bereits (wie in Schritt 0) überlegt wurde, dass die Mischlegierung 40/16 kg Gold und 88/16 kg Silber enthalten soll:

$$\begin{array}{lcccccc} \text{Gold:} & \frac{2}{5}x & + & \frac{3}{10}y & = & \frac{40}{16} \\ \text{Silber:} & \frac{3}{5}x & + & \frac{7}{10}y & = & \frac{88}{16} \end{array}$$

4. Lösen des Gleichungssystems

   Es empfiehlt sich, dieses LGS zu vereinfachen. Bereits in Schritt 0 hätten die Brüche, welche die Gesamtmassen für Gold und Silber angeben, gekürzt werden können: $\frac{40}{16} = \frac{5}{2}$, $\frac{88}{16} = \frac{11}{2}$. Durch Multiplikation beider Gleichungen mit 10 verschwinden alle Brüche in den Gleichungen:

$$\begin{array}{lcccccc} \text{Gold:} & 4x & + & 3y & = & 25 \\ \text{Silber:} & 6x & + & 7y & = & 55 \end{array}$$

   Das Lösen dieses Gleichungssystems, z. B. mit dem Additionsverfahren, ergibt $x = 1$; $y = 7$.

5. Überprüfung des Ergebnisses am Text

   Vor der Überprüfung am Text sollte zunächst anhand des ursprünglich aufgestellten Gleichungssystems geprüft werden, ob die Lösung das Gleichungssystem erfüllt (innermathematische Probe):

$$\begin{array}{lcccccccccccc} \text{Gold:} & \frac{2}{5}\cdot\mathbf{1} & + & \frac{3}{10}\cdot\mathbf{7} & = & \frac{4}{10} & + & \frac{21}{10} & = & \frac{25}{10} & = & \frac{40}{16} \\ \text{Silber:} & \frac{3}{5}\cdot\mathbf{1} & + & \frac{7}{10}\cdot\mathbf{7} & = & \frac{6}{10} & + & \frac{49}{10} & = & \frac{55}{10} & = & \frac{88}{16} \end{array}$$

   Eine Überprüfung am Text entspricht einer sachbezogenen Verbalisierung dieser Rechnung. Schüler werden in derartigen Kontexten häufig die Verwendung von Dezimalbrüchen bevorzugen (was in dem gegebenen Beispiel keine Probleme bereitet, da nur endliche Dezimalbrüche auftreten).

   1 kg einer Gold-Silber-Legierung mit dem Verhältnis 2 : 3 enthält 2/5 kg Gold, also 0,4 kg. 7 kg einer Gold-Silber-Legierung mit dem Verhältnis 3:7 enthalten 21/10 kg, also 2,1 kg Gold. Insgesamt sind das 2,5 kg Gold.

   $\frac{40}{16} = 2,5$; also ist die Bedingung für die Goldmasse erfüllt, denn insgesamt sollen in der neuen Legierung $\frac{5}{16}$ von 8 kg Gold enthalten sein, das sind 2,5 kg.

   Dieselbe Überlegung lässt sich für die Silbermasse anstellen.

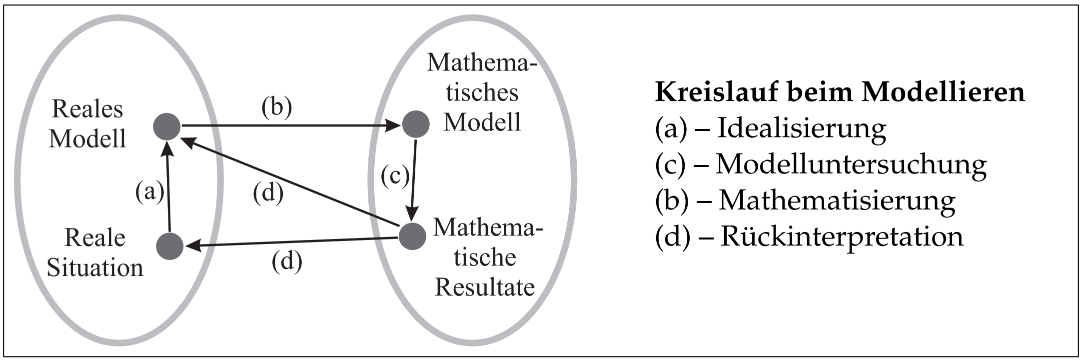
6. Schreibe das Ergebnis auf:

   Um 8 kg einer Gold-Silber-Legierung mit dem Verhältnis 5 : 11 herzustellen, müssen 1 Kilogramm der 2:3−Legierung und 7 Kilogramm der 3:7−Legierung verwendet werden.

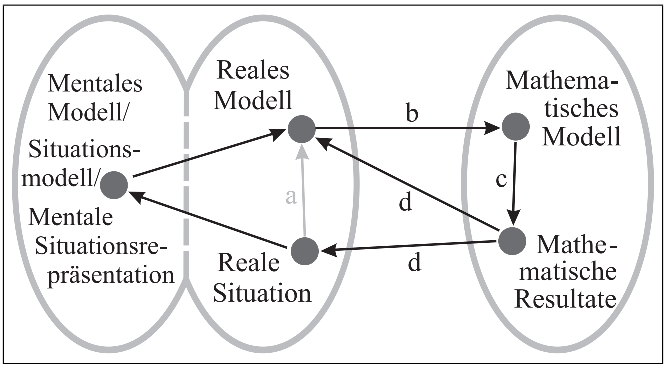
4.3 Der Modellbildungskreislauf

Im Zusammenhang mit anwendungsbezogenen Aspekten des Mathematikunterrichts hat sich in den vergangenen beiden Jahrzehnten die Forderung durchgesetzt, dass Schüler befähigt werden sollten, sich umfassender mit Anwendungssituationen auseinanderzusetzen, diese mathematischen Lösungen zugänglich zu machen und die erlangten Lösungen kritisch in den Ausgangssituationen zu interpretieren. Diese Aspekte sind dem Kompetenzbereich „Modellieren“ (in den Bildungsstandards und Rahmenlehrplänen) zuzuordnen.

- Anwendungssituationen geeignet „reduzieren“ / abstrahieren, sodass mit den vorhandenen mathematischen Mitteln (Werkzeugen) eine Beschreibung / Bearbeitung möglich ist
- Lösung des Problems in dem (vereinfachten) Modell
- Rückübertragung auf die reale Situation, Validierung der Lösung



Erweiterung des Modellierungskreislaufes um subjektive Komponenten



4.4 Klassifikationen von Modellen in der Mathematikdidaktik

Arten von Modellen:[a]

- deskriptive Modelle
- normative Modelle

[a] BLUM, W.: Anwendungsbezüge im Mathematikunterricht – Trends und Perspektiven. In: KADUNZ et al.(Hrsg.): Trends und Perspektiven. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Bd. 23. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky, 1996, S. 19.

Verfeinerte Einteilung[a]

- Modelle, die beschreiben
- Modelle, die erklären
- Modelle, die vorhersagen
- Modelle, die vorschreiben

[a] HENN, H.-W.: Warum manchmal Katzen vom Himmel fallen. Oder: Von guten und schlechten Modellen. In: HISCHER (Hrsg.): Modellbildung, Computer und Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker, 1999, S. 10.

Siehe dazu auch Exkurs 2 (Abschnitt 4.10, S.14ff.)

Deskriptive Modelle (beschreibend, mitunter erklärend oder vorhersagend) *dominieren* in mathematikdidaktischen Veröffentlichungen.

4.5 Einige einfache Beispiele

Einfaches Beispiel einer Modellbildungsaufgabe (in Anlehnung an VOLLRATH):

> Zwei Kerzen brennen mit unterschiedlicher Geschwindigkeit ab:
> – Kerze A ist 36 cm lang und brennt mit 3 cm pro Stunde ab,
> – Kerze B ist 10 cm lang und brennt mit 1 cm pro Stunde ab.
> Wann sind beide Kerzen gleich lang?
> Stelle eine Gleichung auf.
>
> 

- ▷ Was müssen die Schüler bei dieser Aufgabe leisten?
- ▷ In der Aufgabenstellung sind bereits wesentliche Schritte der Mathematisierung enthalten. Welche sind das?
- ▷ Wie ließe sich die Aufgabe verändern, damit die Schüler in stärkerem Maße selbst Idealisieren und Mathematisieren müssen?

Der Weg von der Realsituation zum Realmodell erfordert oft *Schätzungen*, wie in folgendem Bsp.:

- Wie viele Menschen stecken in einem 20 km langen Stau?

Erkennbar wird hier der Zusammenhang zwischen Modellbildung und den so genannten *Fermi-Aufgaben*. (Prominentes Beispiel: Wie viele Nägel enthält eine große Tüte?)

Weitere erprobte Modellbildungsfragen:

- Wie groß ist die Hautoberfläche eines Menschen?
- Wie viel Lack braucht man für ein Auto?
- Wie lange ist es am 1. 11. hell?
- Ein tropfender Wasserhahn kann täglich bis zu 100 Liter Wasser verschwenden – kann das stimmen?

Oft werden Aufgaben „verkürzt“ oder in ihrem Realitätsgehalt „beschnitten“, um in kurzer Zeit lösbar zu sein. Aspekte des Modellierungskreislaufes und fächerübergreifende Aspekte geraten dabei häufig „unter die Räder“.

> Trotz intensiven Putzens nach dem Abendessen ist auf einem Backenzahn ein Bakterium übrig geblieben. Dieses vermehrt sich so, dass sich die Anzahl der Bakterien nach einer Stunde verdoppelt hat.
>
> a) Wie viele Bakterien tummeln sich nach 2; 4; 6; 12 Stunden auf dem Backenzahn?
>
> b) Wie viele Bakterien wären es, wenn die betreffende Person die Zähne erst am nächsten Abend, nach 24 Stunden, wieder putzte und die Vermehrungsrate sich nicht änderte?
>
> c) Welche Funktion beschreibt das Wachstum der Bakterien?
>
> Zahnärzte empfehlen, die Zähne mindestens morgens und abends zu putzen, am besten jedoch nach jeder Mahlzeit, da sich mit jeder Mahlzeit Bakterien auf den Zähnen absetzten, die sich anschließend vermehren. Welche Konsequenzen hat es wenn man sich nach einer Mahlzeit 6; 12; 24; 48 Stunden die Zähne nicht putzt? Entwickle ein geeignetes mathematisches Modell, das zeigt, wie schnell sich Bakterien vermehren und somit zu Zahnproblemen führen können.

Auftrag: Vergleichen Sie die beiden obigen Aufgabenstellungen in Hinblick auf Realitätsbezug, die Schritte des Modellierungskreislaufes und die Notwendigkeit fächerübergreifenden Arbeitens.

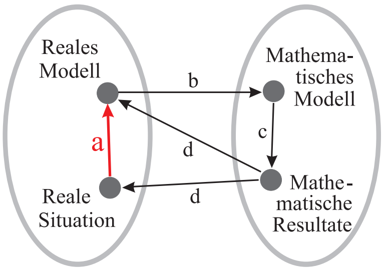
4.6 Modellbildung, -validierung und -verfeinerung am Beispiel der Populationsdynamik

Die Populationsdynamik arbeitet mit einer Vielzahl von verschiedenen Modellen, die das Wachstum von Populationen mehr oder weniger gut beschreiben. Es müssen Annahmen diskutiert und erprobt, Modelle verfeinert sowie Vergleiche mit realen Daten angestellt werden.

4.6.1 Geometrisches Wachstum

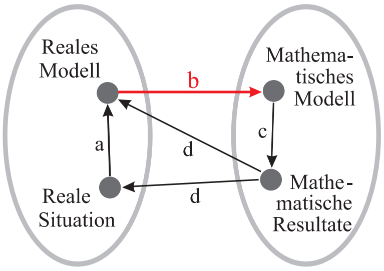
Beispiel:

- Ein Bauer hat 200 Rinder und möchte seine Herde durch natürliche Vermehrung auf 500 Tiere erweitern. Nach einem Jahr zählt die Herde 230 Tiere. Wie lange dauert es erwartungsgemäß, bis der Bauer sein Ziel erreicht hat?



Modellannahmen (a):

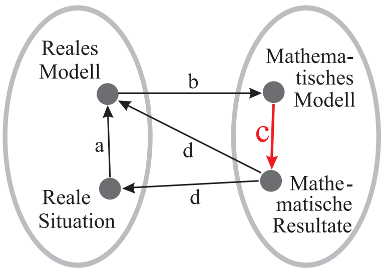
- Die Zunahme des Bestands hängt von der Zahl der vorhandenen Tiere ab.
- Sonstige Einflüsse, die das Wachstum beeinflussen (z. B. begrenzen), gibt es nicht.
- Die Zuwachsrate ist jedes Jahr gleich.



Mathematisierung (b):

- $\frac{x(n+1)}{x(n)} = \frac{x(1)}{x(0)} = \frac{230}{200} = 1,15$

  (für $n \in \mathbb{N}$, solange $x(n) < 500$,
  Dimension der Argumente: 1 Jahr)



Lösung im mathematischen Modell (c):

- $\frac{x(n+1)}{x(n)} = \frac{x(1)}{x(0)} = \frac{230}{200} = 1{,}15$

$\Rightarrow\ x(2) = x(1) \cdot 1{,}15 \approx 264$

$\dots$

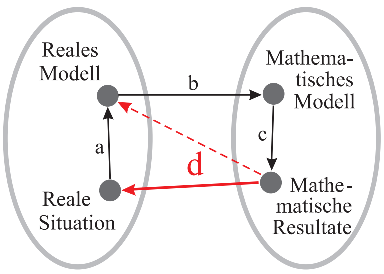
$x(6) = x(5) \cdot 1{,}15 \approx 463$

$x(7) = x(6) \cdot 1{,}15 \approx 532$

- Oder:
  $x(n) = 1{,}15^n \cdot x(0)$

$$\Rightarrow\ n = \log_{1{,}15} \frac{x(n)}{x(0)} = \frac{\ln \frac{x(n)}{x(0)}}{\ln(1{,}15)} = \frac{\ln \frac{500}{200}}{\ln(1{,}15)}$$

$n \approx 6,56$



Rückinterpretation (d):

- Falls der Bauer über ausreichende Ressourcen verfügt und keine unvorhergesehenen Ereignisse eintreten, kann damit gerechnet werden, dass seine Herde nach ca. 6-7 Jahren auf 500 Tiere angewachsen ist.

Bereits die Aufgabenstellung enthält einige Vorgaben, die das verwendete Modell geometrischen Wachstums als einigermaßen realistisch nahelegen:

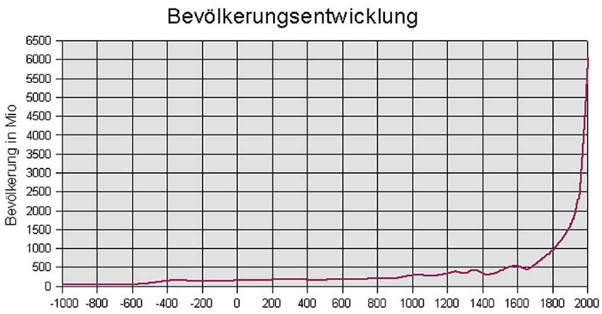
- Betrachtung diskreter Zeitintervalle,
- Begrenzung der Populationsgröße auf 500.

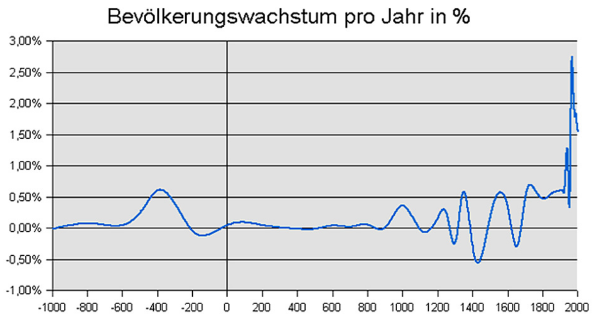
Unerwähnte Annahme: Repräsentative Altersverteilung der Rinder in der Herde.

Ein anderes Beispiel:

- Die Weltbevölkerung betrug im Juni 2002 ca. 6,215 Mrd. Menschen und im Juni 2008 ca. 6,705 Mrd. Menschen. Wie viele Menschen werden 2020 auf der Erde leben?

⇒ Diese Aufgabe ist praktisch nicht lösbar. Prognosen haben die tatsächliche Bevölkerungsentwicklung in den vergangenen Jahrzehnten fast immer deutlich überschätzt (vor allem Fehleinschätzungen der Entwicklung in China).





Noch ein Beispiel:

- Eine Hefekultur hatte zu Beginn einer Messreihe eine Masse von 9,6 mg, nach einer Stunde 18,3 mg. Es soll die Masse der Hefe in Abhängigkeit von der Zeit ausgedrückt werden.

Modellannahme (Idealisierung):

- Die Hefe kann „ungestört“ wachsen.

Mathematisierung

- Das Hefewachstum ist proportional zur vorhandenen Hefemasse.
- Diskretes Modell:

$$\frac{m(t+1)}{m(t)} = \frac{m(1)}{m(0)} = \frac{18,3}{9,6} \approx 1.91 \qquad \text{(Dimension der Argumente: 1 Stunde)}$$

Modelluntersuchung / Lösung innerhalb des Modells:

t in h	0	1	2	3	4	5	6	7	8
m in mg	9,6	18,3	34,9	66,5	126,8	241,6	460,6	878,1	1673,8

Die Validierung kann ergeben, dass die erhaltenen Resultate unsinnig oder zu ungenau sind und neue Modellierungen erfordern.

4.6.2 Exponentielles Wachstum

Das obige Beispiel (Hefekultur) wird erneut untersucht, die Modellannahmen werden aber zunächst nicht verändert.

Modellannahme:

- Die Hefe kann „ungestört“ wachsen.
- Das Hefewachstum ist proportional zur vorhandenen Hefemasse.

Mathematisierung (stetiges Modell) und Lösung im mathematischen Modell:

- $m'(t) = k \cdot m(t)$

  $m(t) = a \cdot e^{k \cdot t}$ (mit $a = m(0)$)

  $m(1) = m(0) \cdot e^{k \cdot 1}$

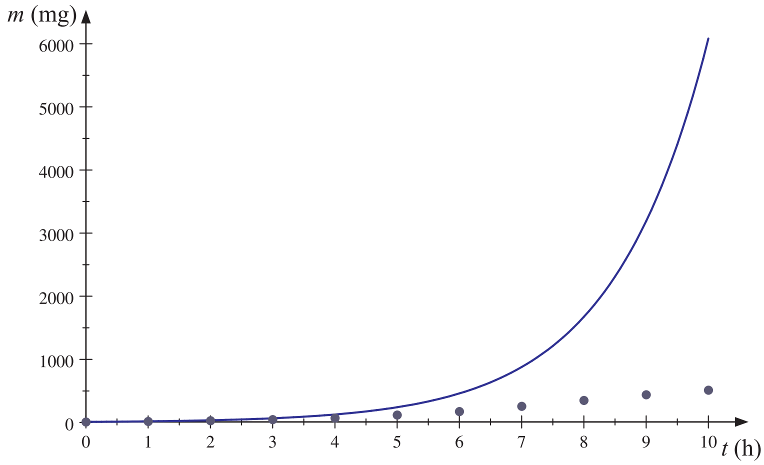
  $\Rightarrow \quad k = \ln \frac{m(1)}{m(0)} \approx 0,645$

  $m(t) \approx 9{,}6 \cdot e^{0{,}645 \cdot t}$

  (Dimension der Argumente: 1 Stunde)

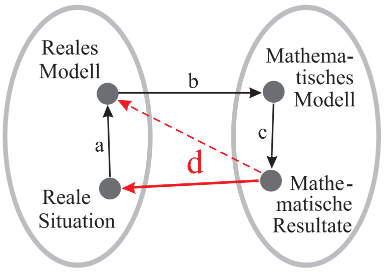
Validierung:

- Die Prognose des des mathematischen Modells wird mit Messwerten verglichen (hier eine sehr berühmte Messreihe von T. CARLSON, 1913):



Messpunkte:
Messungen von T. CARLSON, 1913

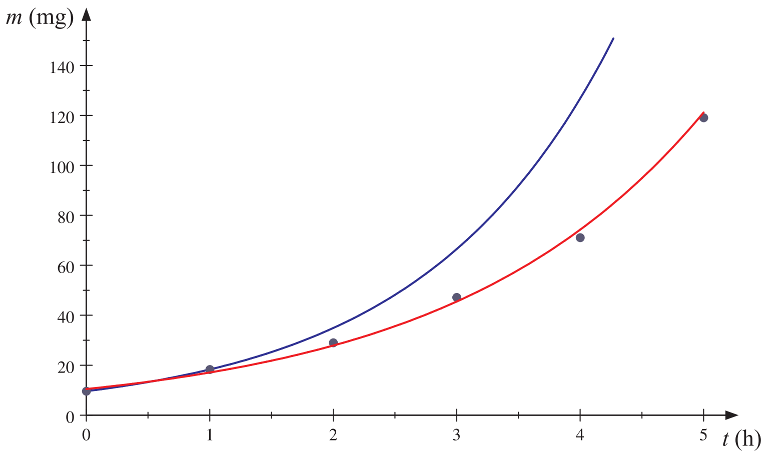
Beschreibung durch das Modell:
$m(t) = 9{,}6 \cdot e^{0{,}645 \cdot t}$
(durchgehender Graph)



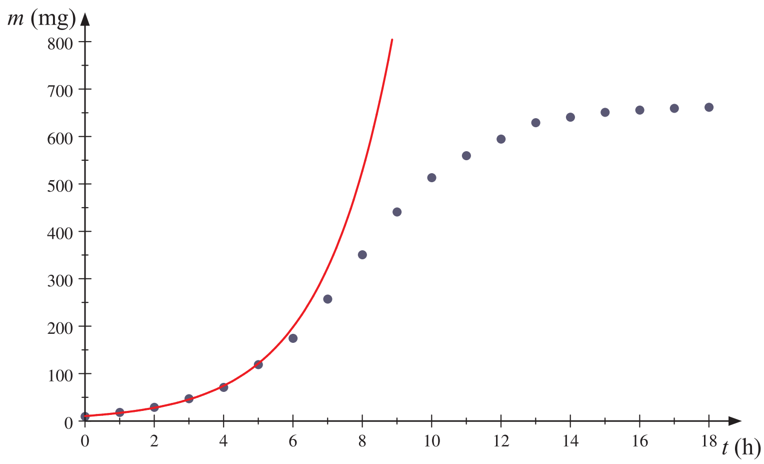
Überlegungen zur Rückinterpretation / Validierung:

- Ist unbegrenztes Wachstum möglich?
- Oder wirken begrenzte Ressourcen wachstumshemmend?
- Treten andere Effekte auf, die das Wachstum beeinflussen?
- Falls möglich: Vergleich mit Messreihen.

Eine genauere Betrachtung der Daten kann zu dem Versuch führen, das Modell durch Parameteränderungen so zu verändern, dass es die Realität besser beschreibt:



So beschreibt m_2 mit
$m_2(t) = 10{,}5 \cdot e^{0{,}49 \cdot t}$
den Wachstumsvorgang innerhalb der ersten 5 Stunden schon deutlich besser als m mit der oben angegebenen Funktionsgleichung.

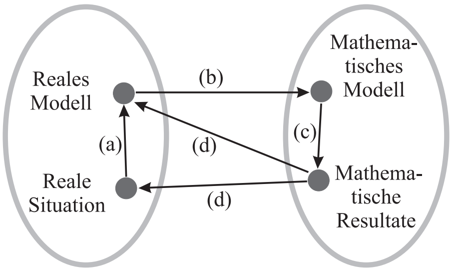


Aber bei Betrachtung eines längeren Zeitraums wird deutlich, dass der Vorgang durch das Modell des exponentiellen Wachstums nicht beschrieben werden kann.

Es werden also neue Überlegungen zur Idealisierung und daraus resultierend neue Mathematisierungen notwendig, die zu einem anderen Modell führen.

4.6.3 Logistisches Wachstum

Die folgenden Überlegungen beziehen sich immer noch auf die Aufgabe zum Wachstum einer Hefekultur auf S. 7.



Modellannahmen (a):

- Das Wachstum verläuft zunächst annähernd proportional zur vorhandenen Hefemasse.
- Durch begrenzte Ressourcen und evtl. andere Faktoren ist unbeschränktes Wachstum nicht möglich. (Hefe produziert Alkohol, der das Hefewachstum bremst.)
- Wachstum erfolgt nur bis zu einem Maximalwert M.

Mathematisierung (b):

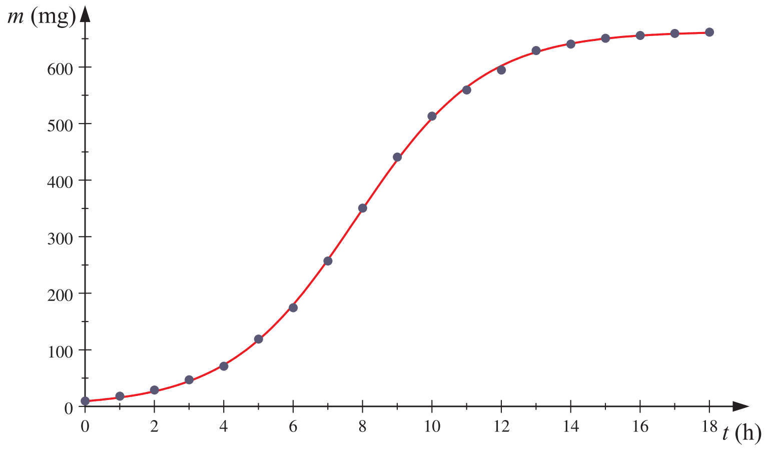
$$m'(t) = k \cdot m(t) \cdot (M - m(t))$$

$$m'(t) = k \cdot M \cdot m(t) - k \cdot m(t)^2$$

(Logistische Differentialgleichung: Verhulst, 1844/45)

Lösung im mathematischen Modell (c):

Für $t_0 = 0$ ist $m(t) = \dfrac{M \cdot m_0}{m_0 + (M - m_0) \cdot \mathrm{e}^{-M \cdot k \cdot t}}$

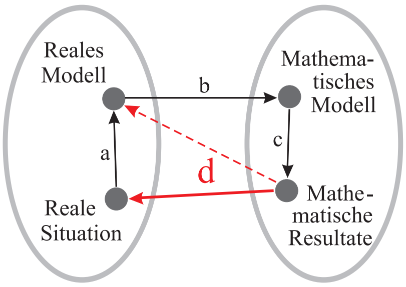


Bestimmung der Konstanten (Methode der kleinsten Quadrate):

$M \approx 663{,}1$

$m_0 \approx 9{,}135$

$k \approx 0{,}0008246$



Rückinterpretation (d):

- Das konkrete Experiment (und viele andere Situationen) werden durch das Modell des logistischen Wachstums gut beschrieben.
- Bedingung:
  Isolierte Populationen auf begrenztem Raum, keine Interaktion mit anderen Spezies.

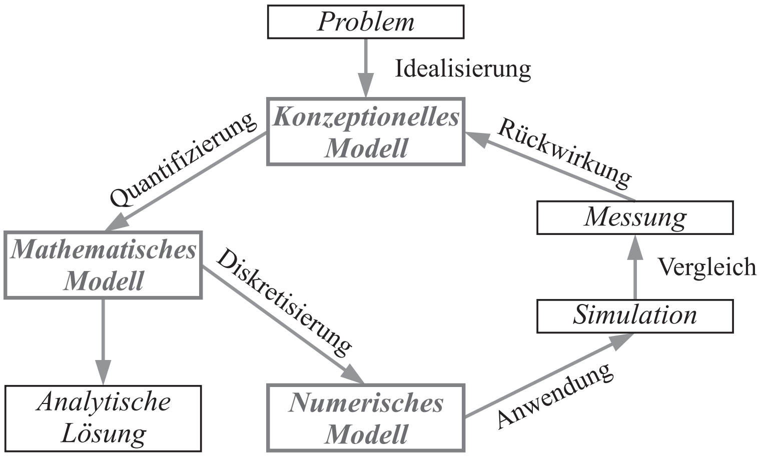
- Logistisches Wachstum: deskriptives Modell mit einigen durchaus plausiblen Annahmen – aber keine Erklärung für Zusammenhänge im Detail.

  „Biologen halten das logistische Wachstum für einen mathematisch bewiesenen Sachverhalt, während Mathematiker [es] für ein experimentell nachweisbares Naturgesetz halten.“[4]

[4] Racke, U.; Stein, G.: *Das logistische Wachstum als problematisches Beispiel mathematischer Modellbildung.* In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM) 27 (1995), 1, S. 3.

4.7 Ein allgemeiner Modellbegriff

Ein Modellierungszyklus aus der Sicht eines Numerikers[5]

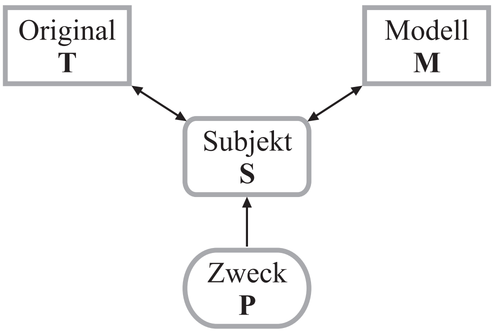


Dieser Modellierungskreislauf enthält völlig andere Elemente als der in der Mathematikdidaktik gebräuchliche Kreislauf auf S. 4. Er wurde aus einer anderen Perspektive und mit anderen Zielen aufgestellt.

⇒ **Modellierungskreisläufe sind selbst nur Modelle**

Dies ist ein Grund, zu fragen, was Modelle eigentlich sind, und einen kurzen Blick auf philosophische Grundlagen zu werfen.

Allgemeine Modellauffassung[6]



Hauptmerkmale von Modellen[7]

- **Abbildungsmerkmal:**
  Modelle sind stets Modelle von etwas, nämlich Abbildungen, Repräsentationen natürlicher oder künstlicher Originale, die selbst wieder Modelle sein können.[8]
- **Verkürzungsmerkmal:**
  Modelle erfassen i. Allg. nicht alle Attribute des durch sie repräsentierten Originals, sondern nur solche, die den jeweiligen Modellerschaffern und/oder -benutzern relevant erscheinen.
- **Pragmatisches Merkmal:**
  Modelle sind nicht nur Modelle von etwas, sondern auch Modelle für jemanden; …sie dienen einem bestimmten Zweck.

---

[5] SONAR, T.: *Angewandte Mathematik, Modellbildung und Informatik*. Braunschweig: Vieweg, 2001, S. 29.

[6] APOSTEL, L.: Towards the formal study of models in the non-formal sciences. In: FREUDENTHAL, H. (Hrsg.): *The concept and the role of the model in mathematics and natural and social sciences*. Dordrecht: Reidel, 1961.
Siehe dazu auch: WEBER, H.: *Grundlagen einer Didaktik des Mathematisierens*. Frankfurt a. M.: Verlag Peter Lang, 1980.

[7] STACHOWIAK, H.: *Allgemeine Modelltheorie*. Wien, New York: Springer, 1973.

[8] Die Originale „können dem Bereich der Symbole, der Welt der Vorstellungen und der Begriffe oder der physischen Wirklichkeit angehören" (STACHOWIAK 1973, S. 131).

4.8 Eine Projektaufgabe zu Entwurfsmodellen

Bisher wurden deskriptive Modellierungen betrachtet. Bei **normativen Modellierungen** geht es nicht um die Beschreibung von vorhandener Realität, sondern um die Regelung von Sachverhalten. Beispiele sind Steuerfestlegungen, Krümmungen von Straßen oder die Verteilung von Parlamentssitzen auf die Parteien. Ebenfalls nicht nur um die Beschreibung, sondern um die Gestaltung von Realität geht es bei **Entwurfsmodellen**, die auch in der Informatik sehr bedeutsam sind. Die folgende Aufgabe gibt ein Beispiel für Entwurfsmodelle, bei denen ein Prozess zu gestalten ist.

Projektaufgabe: Aufzüge

Ein Betrieb mit 1200 Angestellten bezog ein neues Bürogebäude. Das Gebäude besitzt 21 Etagen: das Erdgeschoss und die Stockwerke 1 bis 20. In der Eingangshalle im Erdgeschoss befinden sich 6 Aufzüge. Alle Angestellten arbeiten im ersten Stockwerk oder höher und benutzen die Aufzüge. In den ersten Wochen stellt sich heraus, dass es morgens beim Hereinkommen große Probleme gibt. Sowohl das Erkämpfen eines Aufzugs als auch die Zeit, die manche Aufzüge unterwegs sind, führen zu unangenehmen Situationen. Es kommt manchmal vor, dass ein Aufzug mit Angestellten besetzt ist, die alle zu unterschiedlichen Etagen unterwegs sind. Die Menschen, die unten warten (und das sind manchmal viele), versuchen alle, in denjenigen Aufzug zu kommen, der als erster unten ankommt und dem Gebäudeeingang am nächsten liegt.

Nach einigen Wochen beschließt die Direktion, eine „Aufzugsaufsicht“ einzustellen, die Maßnahmen ergreifen soll, die den Strom der Angestellten zu den Stockwerken flüssiger verlaufen lassen. Die Aufsicht listet zuerst die Angaben auf, die mit den Problemen zusammenhängen:

Zu jedem Stockwerk fahren 60 Personen. Die Kapazität eines jeden Aufzugs beträgt 20 Personen. Zur Geschwindigkeit der Aufzüge werden die folgenden Informationen gesammelt:

- Von Stillstand bis zu Stillstand ein Stockwerk höher oder tiefer: 8 sec.
- Von Stillstand bis zum Passieren des nächst höher oder tiefer gelegenen Stockwerks: 5 sec.
- Zeit zwischen dem Passieren zweier aufeinander folgender Stockwerke: 3 sec.
- Vom Passieren eines Stockwerks bis zum Stillstand im nächst höher oder tiefer gelegenen Stockwerk: 6 sec.
- Zeit, während der ein Aufzug in einem Stockwerk stillsteht: durchschnittlich 10 sec.

Alle Angestellten kommen zwischen 8:45 und 9:00 herein, es ist ein gleichmäßiger Strom. Die Angestellten verlassen ihr Stockwerk zwischen 8:45 und 10:00 kaum. Die Aufzüge werden in dieser Zeit also (fast) nur für den Transport der eintreffenden Angestellten gebraucht.

Aufgabenteile I, II (*deskriptive Modellierung*):

1. Wie lange kann ein Fahrstuhl insgesamt im schlimmsten Falle unterwegs sein, bis er wieder im Erdgeschoss ankommt?
2. Berechnet, wie lange es ungefähr dauert, bis alle Angestellten auf dem richtigen Stockwerk angekommen sind.
3. Findet heraus, wie groß die Anzahl der Menschen werden kann, die in der Eingangshalle warten.
4. Bestimmt die Zeit (ab der Ankunft im Gebäude), die ein Angestellter brauchen kann, um auf seinem Stockwerk anzukommen.

Die Aufsicht überlegt sich das folgende Modell, um den Strom der Angestellten – wie sie hofft – schneller weiterzuleiten: Drei Aufzüge fahren ausschließlich zu den Stockwerken 1 bis 10. Die drei anderen Aufzüge halten nur in den Stockwerken 11 bis 20.

5. Welche Antworten ergeben sich auf die Fragen 1.-4., wenn dieses Modell umgesetzt wird?

Aufgabenteile III, IV (*Entwerfen von Prozessmodellen*):

6. Überlegt euch mindestens drei Fahrpläne für den Aufzugsverkehr, die für eine schnellere Abwicklung des morgendlichen Spitzenansturms sorgen. Vergleicht alle Modelle miteinander und benennt für jedes Modell Argumente, die dafür oder dagegen sprechen.
7. Stellt euch vor, ihr wäret die Aufzugsaufsicht. Verfasst ein Konzept für die Direktion, in dem ihr Vorschläge, wie der Menschenstrom zügiger weitergeleitet werden kann, vorstellt. Stützt das Konzept durch Berechnungen und Argumentationen und begründet eure Annahmen.

   Entscheidet auch, inwiefern ihr folgenden Umständen Rechnung tragen wollt: Die Angestellten möchten keine zu komplizierte Regelung, aber sie wollen schnell auf ihrem Stockwerk ankommen. Die Direktion hat ihren Sitz im 15-ten Stockwerk und hätte am liebsten eine Vorzugsbehandlung.

(Aufgabe aus der niederländischen „A-lympiade“; vgl. `www.learn-line.nrw.de/angebote/alympiade`)

4.9 Exkurs 1: Kritische Aspekte einer einseitigen „Anwendungsorientierung“ des Mathematikunterrichts

Anwendungsorientierung des Mathematikunterrichts und mathematische Modellierung haben derzeit *starken Einfluss* auf die Gestaltung neuer Rahmen- bzw. Bildungspläne. LUTZ FÜHRER setzte sich in seinem Buch „Pädagogik des Mathematikunterrichts“ kritisch mit dieser Thematik auseinander, die folgenden (gerahmten oder kursiven) Ausführungen sind diesem Buch entnommen.

> These 23: Der Mathematikunterricht soll – unter anderem – Anwendungsbezüge aufzeigen und aufklären.
>
> These 24: „Anwendungsorientierung"des Mathematikunterrichts kann ... zweierlei bedeuten, nämlich Orientierungshilfe innerhalb der Mathematik oder mathematisch gestützte Orientierung über Außermathematisches. Phasenweise ist ... Anwendungsorientierung dort und nur dort sinnvoll, wo sie intellektuell redlich durchgehalten und allgemeinpolitisch verantwortet werden kann.

zit. aus FÜHRER, L.: *Pädagogik des Mathematikunterrichts*, Vieweg, Braunschweig, 1991, S. 110

„unredlich“: Pseudo-Anwendungsaufgaben, „eingekleidete“ Aufgaben

„politisch verantwortbar“: Beschäftigung mit Finanzmathematik muss nicht dazu führen, dass Schüler zu „Börsenspekulanten“ werden; Berechnung der Wahrscheinlichkeit eines Lottogewinns kann auch dazu führen, das Lottospielen zu unterlassen; . . . .

Mathematikunterricht hat nicht primär die Aufgabe, Schüler für bestimmte Handlungen zu gewinnen oder davon abzuhalten. Er hat die Aufgabe, sie zu kompetenten Einschätzungen zu befähigen.

> Dürfen wir die Stoffpläne am Anwendbaren orientieren, am Nützlichen? Für wen anwendbar, für wen nützlich? Für alle? Ja sicher, das wollen wir. Aber das, was alle brauchen, wünschen und erreichen können, ist allseits begrenzt von dem, was möglich ist, und von dem, was andere brauchen, haben, können, wissen...

zit. aus FÜHRER, L.: *Pädagogik des Mathematikunterrichts*, Vieweg, Braunschweig, 1991, S. 115

> Welche Mathematik steckt in den Bedingungen und Schranken des Erreichbaren, des Machbaren, des Begreifbaren? Für Tankwarte, für Landvermesser, für Kristallographen, für Händler, für Versicherungsvertreter, ... , für mündige Bürger oder auch für Demagogen? Tankwarte müssen rechnen können, aber nichts über Gruppen wissen, nichts über Trigonometrie. Landvermesser und Kristallographen schon. Was ginge das den an, der nicht Tankwart, Landvermesser, Kristallograph... werden möchte? Wir reden doch von allgemeinbildendem Unterricht. Da muß es Allgemeines im Besonderen zu entdecken geben, beim Tankwart, beim Landvermesser, beim Kristallographen..., auch beim Demagogen, *und nicht die Anwendung orientiert, sondern das vermeintlich Allgemeine taucht im Besonderen auf* .... Das motiviert vielleicht zum genauer Hinsehen, schafft Arbeitshypothesen, stiftet vielversprechende Assoziationen, belebt die Fantasie, weckt Berufswünsche - aber es orientiert nicht notwendig alle. Nützlichkeit entbindet nicht von Verantwortung gegenüber Inhalt und Form.
>
> *Die öffentliche Mathematik an ihrer Nützlichkeit ausrichten, hieße ihre teils unbewussten, teils unbekannten Steuerungsfunktionen im kollektiven Bewusstsein unterschätzen, ihr emanzipatorisches Potential paralysieren, Strukturen der Umgangssprache verdecken, Denkweisen vernebeln, bedeutsame Metaphern ignorieren. Es wäre Verrat an der Gedankenfreiheit, Einpassung statt Sozialisation. Eine durchgängige Orientierung des mathematischen Schulcurriculums an Anwendungsthemen sollte gar nicht in Frage kommen.*

zit. aus FÜHRER, L.: *Pädagogik des Mathematikunterrichts*, Vieweg, Braunschweig, 1991, S. 115f
(Hervorhebungen durch A. F.)

Ein Mathematiklehrer, der Anwendungsorientierung ernst nimmt und fachliche oder lebensweltliche Orientierungen vermitteln will, muss die entstehenden Gewichtsetzungen sehr sorgsam fachlich und persönlich verantworten. Mathematik anwenden verlangt Haltung. Die technischen Schwierigkeiten drängen sich bei Anfängern allzu leicht in die Hauptrolle und verfälschen dann jedes vernünftige Urteil. Daher:

These 25: In der Regel erfordern anwendungsorientierte Unterrichtsphasen aus Komplexitäts-, Kompetenz- und Verantwortungsgründen einen Lehrerkommentar als Korrektiv.

Diese These sollte als methodische Konsequenz der beiden voranstehenden eigentlich unmittelbar einleuchten, muß aber wohl angesichts der heute verbreiteten Fetischisierung des Entdeckungslernens einerseits und der Diskriminierung kompetenter Belehrung andererseits besonders erwähnt werden.

Überhaupt sollten Lehrer nicht verbergen wollen, dass sie erwachsen sind und ihr Fach studiert haben. Nach meiner Erfahrung deprimiert das Schüler ebenso wenig, wie es ein Erdkunde-, Musik- oder Sportlehrer tut, der die Welt, von der er immerfort redet, aus eigener Erfahrung wirklich kennt. Ein Lehrer, der in seinem Fach zu Hause ist, darf Schülern das auch hin und wieder vormachen. Er sollte es nur nicht andauernd tun – und das dann gar noch für guten Unterricht in der Sache halten.

zit. aus FÜHRER, L.: *Pädagogik des Mathematikunterrichts*, Vieweg, Braunschweig, 1991, S. 120

4.10 Exkurs 2: Drei Funktionen der angewandten Mathematik: Beschreiben, Vorhersagen, Vorschreiben

Exzerpt aus:

DAVIS, PH J.; HERSH, R., *Descartes Traum. Über die Mathematisierung von Zeit und Raum.* Fischer Taschenbuch Verlag: Frankfurt, 1990, S. 161-169.

Wird Mathematik angewandt, so kann sie zur Beschreibung und zur Vorhersage dienen, sie kann aber auch Vorschriften aufstellen. Diese Funktionen hängen miteinander zusammen, sind aber nicht identisch. Wir wollen im Folgenden diese Unterschiede genauer ergründen.

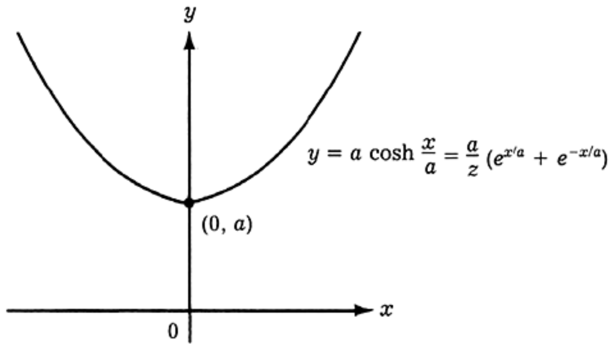
Beschreibung

Ein Hibiskus hat fünf Blütenblätter. Die mathematische Vokabel »fünf« liefert eine bestimmte Beschreibung der Blume. Diese dient dazu, den Hibiskus von anderen Blumen mit drei, vier, sechs und mehr Blütenblättern zu unterscheiden. Diese Beschreibung ist nicht vollständig: gehe ich nur von dem Wort »fünf« aus, so bin ich außerstande, die Hibiskuspflanze exakt zu rekonstruieren. Denn es sagt nichts darüber aus, ob die Blütenblätter linsenförmig oder kreisrund sind. Erweitert man seine Aussage, indem man davon spricht, dass der Hibiskus fünf kreisrunde Blütenblätter besitzt, so beginnt sich ein Bild vor unserem geistigen Auge zu formen.

Wird eine Uhrkette an ihren beiden Enden aufgehängt, so nimmt sie ziemlich genau die Gestalt einer mathematischen Kurve, der so genannten Kettenlinie an. Die Gleichung der Kettenlinie lautet (in einem passenden Koordinatensystem und mit einem entsprechenden Wert für a):

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Damit hat man eine algebraische Beschreibung der Form der aufgehängten Kette

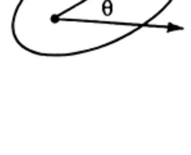


Die mathematische Kettenlinie

Mit etwas graphischem Geschick erhält man aus der Gleichung eine geometrische Kurve. Dann kann man zu sich selber sagen: »Ja, tatsächlich, die Kurve sieht aus wie eine aufgehängte Kette!« Wir können diesen Vorgang auch umkehren: Zuerst fotografiere man eine Kette, dann zeichne man ein Koordinatensystem auf das Foto, und schließlich bestimme man den Wert von a, so dass die mathematische Kurve zur Fotografie passt. [9]

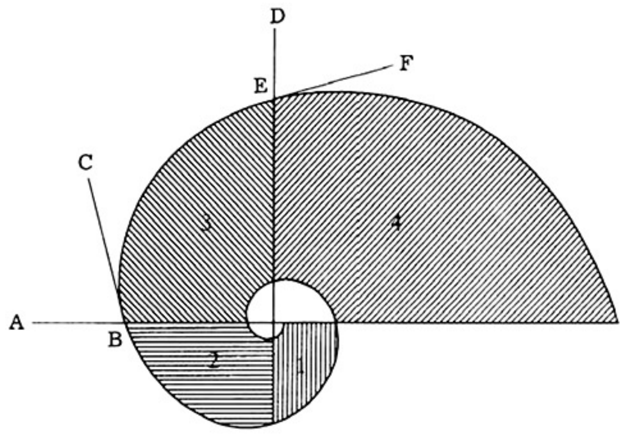
Die Bahn eines Planeten, der die Sonne umkreist, ist annährend eine Ellipse. Also lautet die angenäherte Bahngleichung in einem geeigneten Koordinatensystem:

$$r = a\left(\frac{1}{1+b\cos\theta}\right)$$

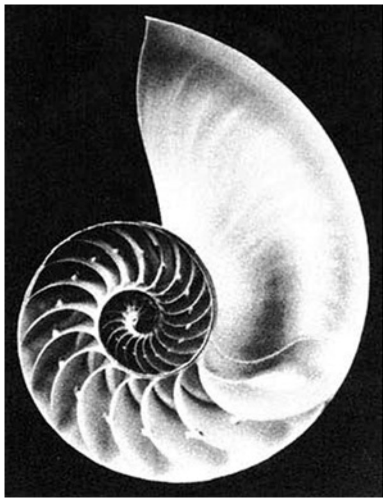


[9] Anmerkung (A. F.): Es kann hier der unglückliche Eindruck entstehen, dass die angegebene Gleichung der Kettenlinie „vom Himmel fällt“ und mathematische Modellierung lediglich darin besteht, die Gleichung für konkrete Ketten oder Seile durch geeignete Parameter geeignet anzupassen. Die eigentliche Modellbildung besteht jedoch darin, die Gleichung (die als mathematisches Modell angesehen werden kann) aus physikalischen Überlegungen abzuleiten; siehe hierzu z. B.: GLAESER, G.: *Der mathematische Werkzeugkasten*. Heidelberg: Spektrum, 2008 (3. Aufl.), S. 328ff.

Die Schale einer Nautilusschnecke hat ziemlich exakt die Form einer logarithmischen Spirale. Die mathematische Gleichung einer derartigen Spirale lautet: $r = ae^{b\theta}$.



Eine logarithmische Spirale. Die durch 1, 2, 3 und 4 markierten Kammern haben genau die gleiche Form.



Die Kammern der Nautilus. Alle Kammern sind ähnlich im Sinne der Geometrie.

Die »Nachhallzeit« T eines Konzertsaales wird durch die Sabine-Eyring-Formel gegeben:

$$T = -13.8 \, \frac{\frac{L}{v}}{\ln(1-a)}$$

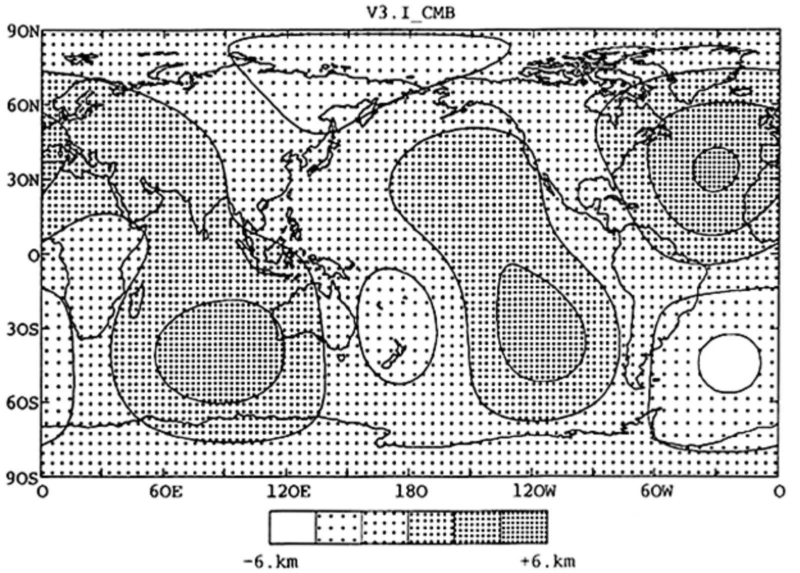
Dabei bedeutet L die mittlere freie Weglänge zwischen zwei aufeinander folgenden Reflexionen derselben Schallwelle, v die Schallgeschwindigkeit und a die Schallabsorptionskonstante. Obwohl diese Formel viele Jahre in Gebrauch gewesen ist, gibt sie das tatsächliche Geschehen in einem Konzertsaal nur schlecht wieder. Das hat man durch exakte elektronische Messungen herausgefunden. Heute sind erheblich kompliziertere Rechnungen an ihre Stelle getreten. (John R. Peirce: »The Science of Musical Sound«, p. 146)

In allen diesen Beispielen geschieht etwas in der Natur. Indem wir uns auf einen genügend kleinen und genügend abstrakten Ausschnitt des Phänomens beschränken, können wir diesen als Ganzes erfassen und den Ausschnitt durch eine äquivalente mathematische Beschreibung ersetzen.

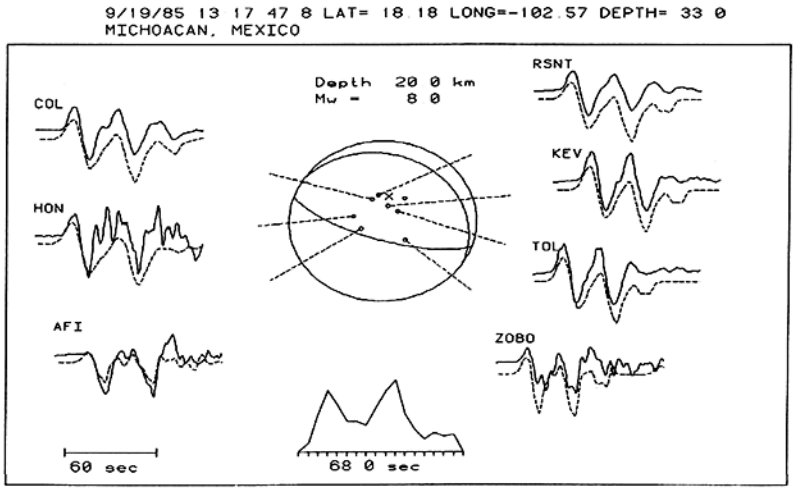
Welche Aspekte der Welt können mathematisch beschrieben werden? Wir kennen zahlreiche Beispiele erfolgreicher Beschreibungen. Dennoch gibt es trotz der extravaganten Ansprüche, die hinsichtlich der Mathematik vorgebracht wurden, auf diese Frage keine befriedigende Antwort. Eine Funktion der Forschung im Bereich angewandter Mathematik ist es, mehr und mehr mathematische Beschreibungen zu produzieren.

Welche Aspekte der Welt lassen sich angeben, die nicht der mathematischen Beschreibung zugänglich sind? Kurz gesagt glaube ich, dass dies jene Aspekte sind, die unter die Überschrift »humanistische Aussagen« fallen. Beschreibt ein Liedermacher das Leben mit dem sprachlichen Symbol »das Leben ist wie eine Hand voll Kirschen«, so gibt es hierfür kein mathematisches Äquivalent. Schreibt aber ein Dichter metaphorisch »das Leben ist ein Spiel«, so könnte jemand, da bereits viele Spiele mathematisch behandelt worden sind, auf die Idee kommen, eine mathematische Beschreibung des Lebens zu geben und zu behaupten, dass diese derjenigen des Dichters äquivalent sei.

Es gibt auch nonverbales, nicht-symbolisches Wissen, wie beispielsweise das Bewusstsein, dass man sich wohl fühlt. Ein Experimentalist könnte in diesem Fall behaupten, dass Wohlergehen einfach eine Sache des Hormon- und Blutzuckerspiegels sei. Aus diesem Grunde sei auch hier eine Beschreibung in der Sprache der Mathematik möglich. Ein Teil des Konfliktes zwischen Positivisten und Humanisten rührt daher, dass die letzteren das Gefühl haben, es müsse einen Teil der Welt geben, der immun ist gegen jegliche Mathematisierung, während die Positivisten behaupten, alles lasse sich durch die Mühlen der Mathematik drehen.



Seismologische Messungen sind das wichtigste Werkzeug bei der Erforschung des Erdinnern. Die weltweit registrierte Ausbreitung von Schockwellen, die durch Erdbeben ausgelöst worden sind, lässt einige wenige wichtige Verwerfungen erkennen. Die Kern-Mantel-Grenze in etwa 2890 Kilometern Tiefe markiert den Übergang vom festen Mantel zum flüssigen Kern. Diese Grenze hat nicht exakt die Gestalt einer Kugeloberfläche. Wir können heute großflächig »Hügel« und »Dellen« auf dieser Oberfläche eintragen.



Mathematisierung des großen mexikanischen Erdbebens

Vorhersage

Die vorhersagende Funktion der Mathematik ist eng mit der beschreibenden verbunden. Beschreibungen im abstrakten Formalismus der Mathematik kondensieren eine große Menge an Information. Eine solche Beschreibung kann befragt werden, um die Antwort auf spezifische Fragen zu finden. Ich halte meine fünfundzwanzig Zentimeter lange Uhrkette an deren Enden fest. Meine Finger befinden sich in gleicher Höhe. Ihr Abstand beträgt zehn Zentimeter. Wie tief wird die Kette unter dem Fingerniveau zu hängen kommen? Mit Hilfe der bekannten mathematischen Beschreibung (der Kettenlinie) kann man den Abstand durch eine Berechnung voraussagen.

Der Begriff »Vorhersage« beinhaltet in seiner gewöhnlichen Verwendung, dass eine Zeitspanne vergeht. Sage mit Hilfe der Newtonschen Bewegungsgesetze voraus, wo die Venus am 1. Januar 2009 stehen wird! Sage voraus, wann und wo die nächste Totaleklipse der Sonne eintreten wird! Sage das Wetter in Fairbanks (Alaska) in zwei Wochen voraus! Sage voraus, wie viel Multiplikationen erforderlich sein werden, um ein bestimmtes mathematisches Problem mit Hilfe einer bestimmten Formel zu lösen!

Im Alltagsleben werden die meisten Prognosen ohne mathematische Hilfsmittel erstellt. Sind wir gewissenhafte Wähler, so werden wir vorherzusagen versuchen, welche Auswirkungen für uns ein Sieg der Partei A haben wird. Wir haben solche Vorhersagen, aber ohne Formeln. Eine Person, die ich gerne mag, macht mir einen Heiratsantrag. Ich muss mich entscheiden: annehmen oder nicht annehmen; ich versuche vorherzusehen, wie das Leben unter den neuen Bedingungen aussehen könnte. Aber nur eine höchst einfältige Person würde eine Prognose, die ein mathematikverliebter Heiratsvermittler mit Hilfe eines Punktesystems erstellt hat, akzeptieren.

Die Grundlagen der Vorhersagen sind vielfältig: Erfahrung, Vernunft, Intuition, Zufall, Vorahnungen, Rat von Experten und Orakel. Wird eine Vorhersage mit Hilfe eines mathematischen Modells und durch Berechnung gewonnen, so nennt man sie »rational«. Rationalen Prognosen wird oft ein höherer intellektueller Status zugesprochen als solchen anderer Herkunft. Die Möglichkeit rationaler Vorhersagen ist Teil des Cartesischen Weltbildes. Cartesianisch gedacht, bedeutet die Verneinung der Möglichkeit »rationaler« Vorhersagen soviel wie die Verstehbarkeit der Welt zu negieren.

Vorschriften machen

Bei der vorschreibenden Funktion der Mathematik denke ich an Situationen, in denen die Mathematik entweder menschliche Handlungen oder (automatisch) irgendwelche technische Vorgänge auslöst. An der Kasse werden die Zebrastreifen der Scannernummer über den Scanner gezogen. Die Rechnung wird automatisch durch die in das System eingebaute Mathematik erstellt, und der Kunde bezahlt. Ein Fluss von Mathematik wird in Bewegung gesetzt, und das Ergebnis (das eine Zahl oder ein abstrakter Symbolismus sein kann) formuliert eine Vorschrift, welche Handlung danach auszuführen sei. Ein Team, das nach Erdöl bohren soll, wird auf Grund von seismischen Daten, die mathematisch behandelt und interpretiert wurden, ausgeschickt. Behandlungen werden nach medizinischen Kennzahlen verschrieben. Eine astronomische Expedition wird auf Grund der mathematischen Vorhersage einer Sonneneklipse ausgerüstet. Ein Thermostat, der die Temperatur eines Hauses reguliert, wird auf 25°C eingestellt. . . .

Wir werden in eine Welt hinein geboren, die so dicht mit präskriptiver Mathematik durchsetzt ist, dass wir uns dessen kaum bewusst sind. Werden wir darauf aufmerksam, so können wir uns nur noch schlecht vorstellen, wie die Welt ohne sie auskommen soll. Beispiele für althergebrachte präskriptive Mathematisierungen sind unsere Maßsysteme für Raum und Masse, unsere Uhren und Kalender, unsere Entwürfe für Gebäude und Maschinen und unser Geld. Möchte man ein moderneres Beispiel haben und dabei zugleich ein Gefühl dafür entwickeln, wie das Leben ohne solche Mathematisierungen aussehen würde, so nehme man die Einkommensteuer. Das ist eine enorme mathematische Struktur, die einer enormen präexistenten mathematisierten Finanzstruktur übergestülpt wird. . . . Brauchen wir diese Art von mathematischen Vorschriften? Es wäre schwierig, sie abzuschaffen, aber genauso schwierig ist es, ihre Komplexität konstant zu halten.

In der amerikanischen Gesellschaft gibt es eine Menge von Beispielen für gerade ausgeführte oder wieder eingeführte präskriptive Mathematisierungen. Examensnoten, IQs, Lebensversicherungen, eine Nummer im Bäckerladen ziehen, Lotterien, Verkehrsampeln (das ägyptische Kairo besitzt keine), Selbstwähldienst beim Telefon, Kreditkarten, Zippcodes, Verhältniswahlrecht, . . . , Punktsysteme als Grundlage für Darlehensgewährungen, zur Erlangung von Arbeitsplätzen im öffentlichen Dienst und für den Führerscheinentzug, Indexsysteme für Dokumente, Schulnoten und so weiter und so fort. Diese Systeme . . . regulieren und verändern unser Leben und kennzeichnen unsere Zivilisation. Sie geben eine Beschreibung, noch bevor das Beschriebene existiert.

Weitere Literaturhinweise

- GREEFRATH, G.: Didaktik des Sachrechnens in der Sekundarstufe. Heidelberg: Spektrum, 2010.
- HINRICHS, G.: *Modellierung im Mathematikunterricht*. Heidelberg: Spektrum, 2008.
- KIEHL, M.: *Mathematisches Modellieren für die Sekundarstufe II*. Berlin: Cornelsen Scriptor, 2006.
- MAASS, K.: *Mathematisches Modellieren, Aufgaben für die Sekundarstufe I*. Berlin: Cornelsen Scriptor, 2007.
- *ISTRON – Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht*, Bände 1-14, Franzbecker: Hildesheim.
- HENN, H.-W.; MEYER, J. (Hrsg.): *Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 1* (ISTRON-Schriftenreihe). Heidelberg: Springer Spektrum, 2014.
- MAASS, J.; SILLER, H.-ST. (Hrsg.): *Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 2* (ISTRON-Schriftenreihe). Heidelberg: Springer Spektrum, 2014.