

Zusammenfassende Notizen zur Vorlesung

Einführung in die Mathematikdidaktik und Didaktik der Geometrie
 Teil 7

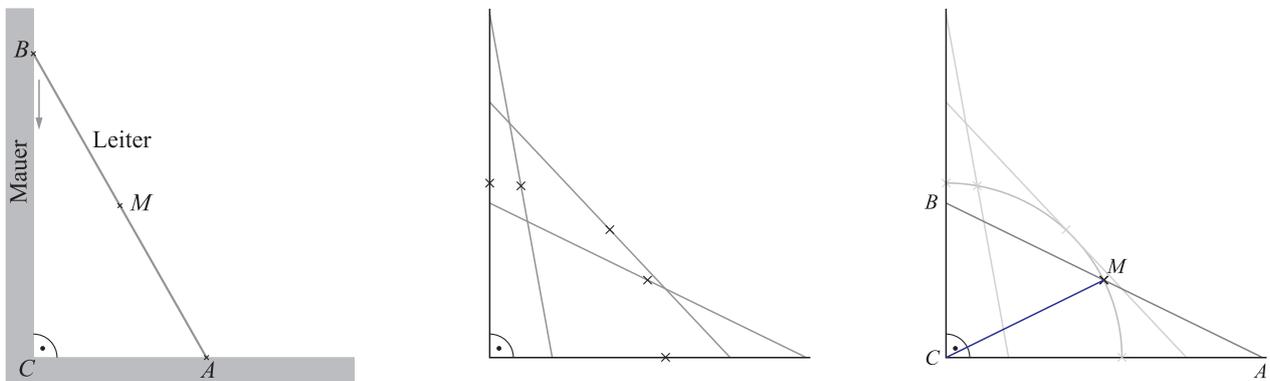
7 Argumentieren, Beweisen, lokales Ordnen

7.1 Erkenntnisfindung und Erkenntnissicherung – Beispiele

- Beweisen: *Sicherung* einer Erkenntnis (die als Satz formuliert sein kann).
- Vor der Erkenntnissicherung sollte im Unterricht i. Allg. die *Erkenntnisfindung* stehen.
- Mitunter lassen sich Erkenntnisfindung und -sicherung nicht vollständig trennen.
- Meist leitet die Frage „*warum*“ die Phase der Erkenntnissicherung ein.

Beispiel: Eine Leiter steht an einer Mauer und rutscht langsam an der Mauer nach unten.

- Welchen Weg beschreibt der Mittelpunkt der Leiter? Begründe deine Antwort.



Beispiel: Innenwinkelsatz

- Erkenntnisfindung: Messungen, DGS(?)
- Anschauliche Begründung, *Beweisidee*
- Exakter Beweis: Was darf und was muss verwendet werden? → Lokales Ordnen.

Voraussetzung: α, β und γ sind Innenwinkel des Dreiecks ABC

Behauptung: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

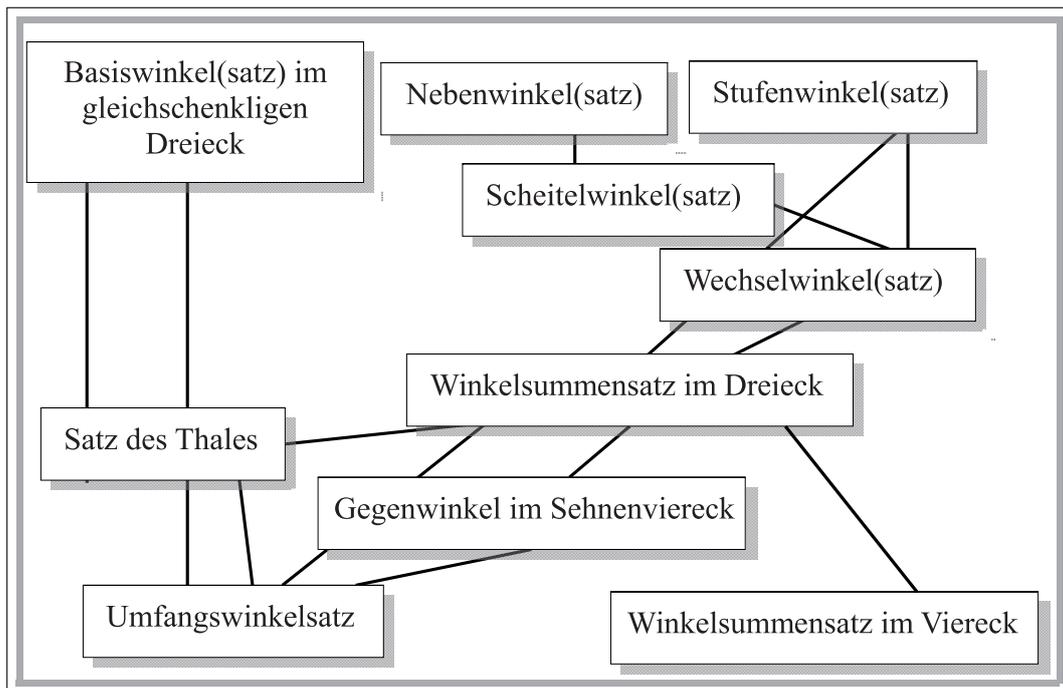
Beweis: - Wir zeichnen / betrachten die Parallele zu AB durch den Punkt C .
 - Sind δ und ε die Winkel, welche diese Parallele mit BC bzw. AC bildet, so gilt:
 $\varepsilon + \delta + \gamma = 180^\circ$ (Nebenwinkelsatz),
 $\delta = \beta$ (Wechselwinkelsatz) und
 $\varepsilon = \alpha$ (Stufenwinkelsatz).
 - Also gilt: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, was zu beweisen war.

7.2 Lokales Ordnen

- Vollständiger (axiomatischer) Aufbau der Geometrie ist im Unterricht kaum möglich (in der Geschichte: vorläufiger Abschluss eines langen Erkenntnisprozesses.)
- Verständnis der gegenseitigen Abhängigkeit von Begriffen und Sätzen ist dennoch wünschenswert.

→ „Lokales Ordnen“ als Herstellung eines Beziehungsgefüges innerhalb eines überschaubaren Feldes.

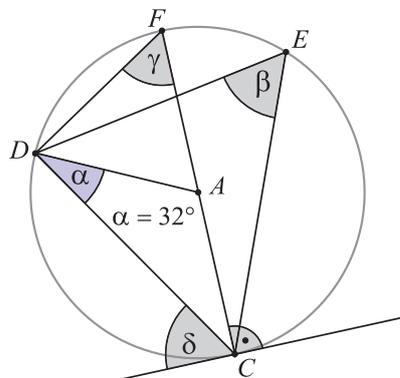
Es blieb eben nichts anders übrig, als die Wirklichkeit zu ordnen, Beziehungsgefüge herzustellen und sie bis zu einem Horizont der Evidenz zu führen, der nicht genau festgelegt und recht variabel war. Ich habe diese Tätigkeit die des lokalen Ordnens genannt. FREUDENTHAL¹



7.3 Arbeiten mit Sätzen vor dem Beweisen

7.3.1 Anwenden von Sätzen → Förderung bereichsspezifischer Beweisstrategien

- Bestimme die fehlenden Winkelgrößen in der Figur.
 - Basiswinkelsatz
 - Satz des Thales
 - Innenwinkelsatz
 - Umfangswinkelsatz



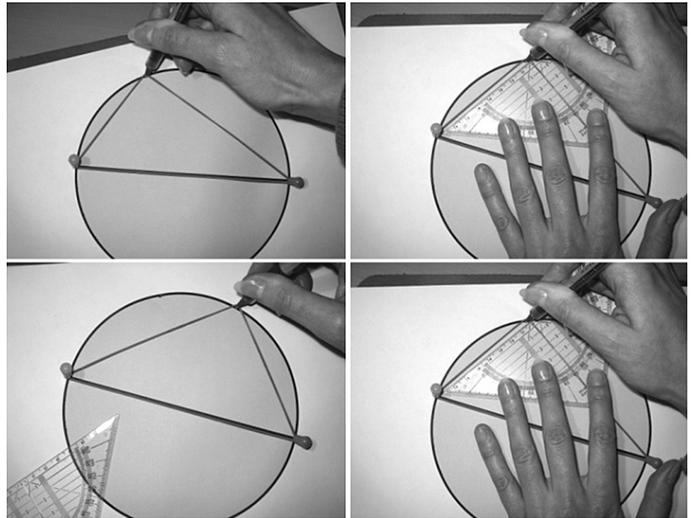
¹ FREUDENTHAL, H.: Was ist Axiomatik, und welchen Bildungswert kann sie haben? In: *Der Mathematikunterricht* 9 (1963), 4, S. 5-29.

7.3.2 Herausarbeiten von Sätzen

- In der Mittelstufe kommt enaktiven und ikonischen Wegen der Satzfindung eine hohe Bedeutung zu.

Beispiel: Satz des Thales →

- Wo enaktive Zugänge nicht ohne Weiteres möglich sind – oder zu ihrer Ergänzung – sollten graphische Darstellungen angefertigt und Messungen durchgeführt werden.
- Gute Möglichkeiten hierfür bietet dynamische Geometriesoftware.

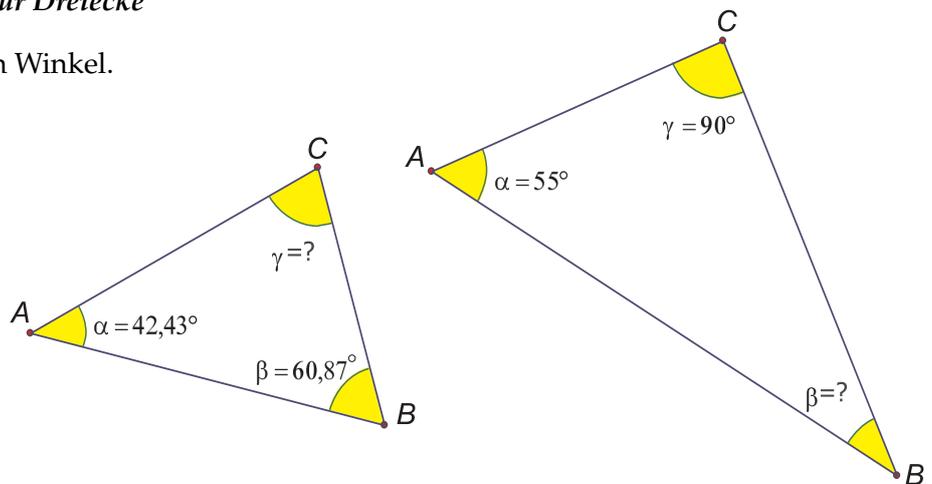


7.3.3 Notwendige Schritte vor dem Führen (exakter) Beweise

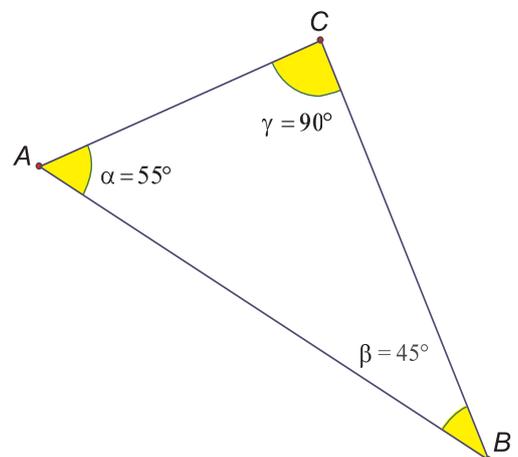
- Bevor ein Satz bewiesen werden kann, muss seine Aussage von den Schülern wirklich verstanden worden sein.
- Dazu: Annehmen, dass der Satz gilt; Arbeiten mit dem Satz.

Beispiel: *Innenwinkelsatz für Dreiecke*

a) Berechne die fehlenden Winkel.



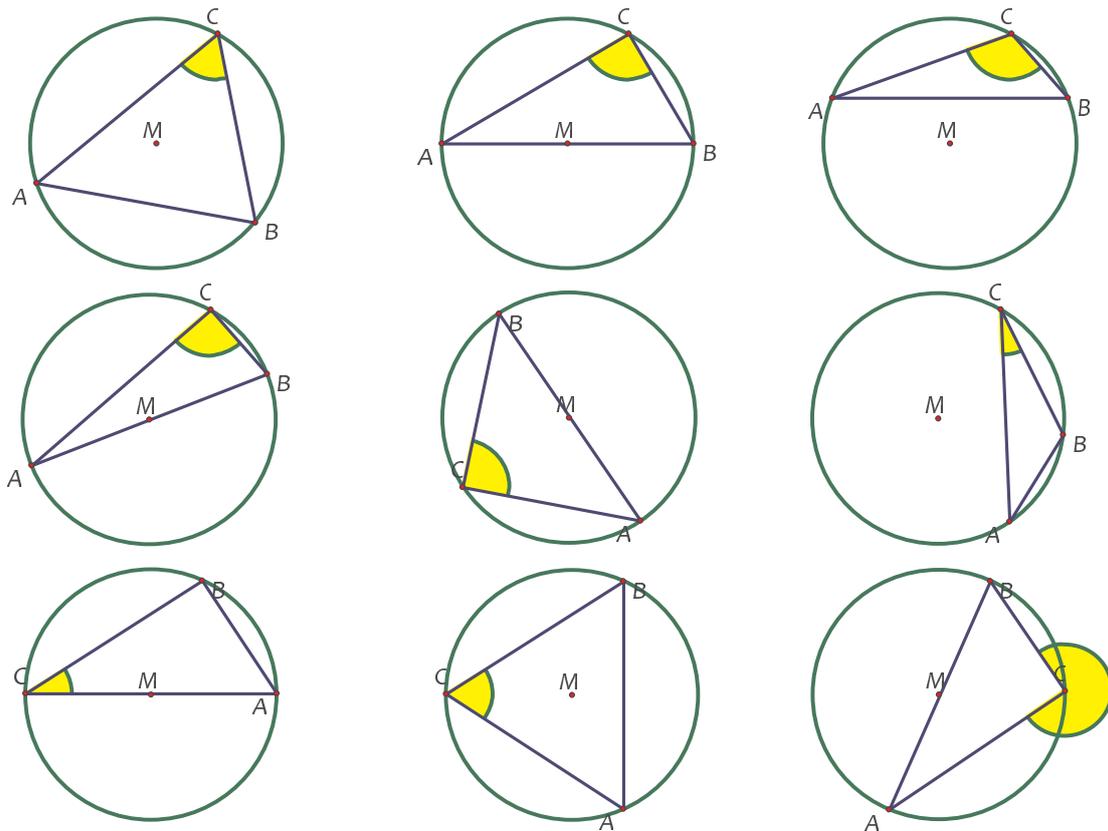
b) Warum gibt es das folgende Dreieck nicht?



c) Kann es Dreiecke mit zwei rechten Winkeln geben?

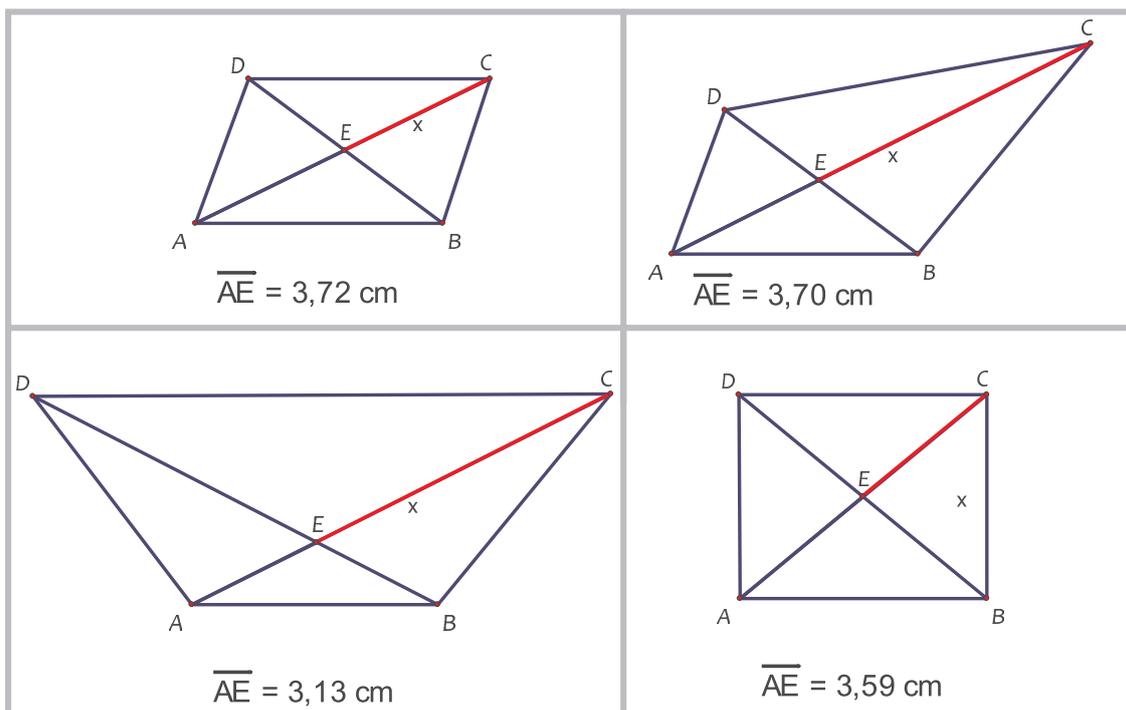
Beispiel: Satz des Thales

- In welchen Fällen kannst du mit dem Satz des Thales begründen, dass der gelbe Winkel ein Rechter ist?



Beispiel: In jedem Parallelogramm halbieren die Diagonalen einander.

- In welchen Fällen kannst du die fehlende Streckenlänge angeben?



7.3.4 Arbeiten mit Sätzen – sprachlich-logische Aspekte

Notwendige Schritte vor dem Führen (exakter) Beweise

- Um Beweise führen zu können, müssen Voraussetzungen und Behauptungen klar herausgearbeitet werden.
- Sinnvoll ist dazu die Formulierung von Sätzen in der „Wenn-Dann“-Form.

Beispiel: Satz des Pythagoras

- In jedem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den Katheten gleich dem Flächeninhalt des Quadrates über der Hypotenuse.
- Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist, so ist die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den Katheten gleich dem Flächeninhalt des Quadrates über der Hypotenuse.

Bei einigen Sätzen ist die Formulierung in der „Wenn-Dann“-Form komplizierter (z. B. Satz des Thales, Strahlensätze) → bedeutsam für Umkehrung(en).

Herausarbeiten von Voraussetzung(en) und Behauptung

- Häufig Verwendung von Skizzen (sprachliche Vereinfachung)
- aber: „Verkürzungen“ vermeiden (z. B.: Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$)

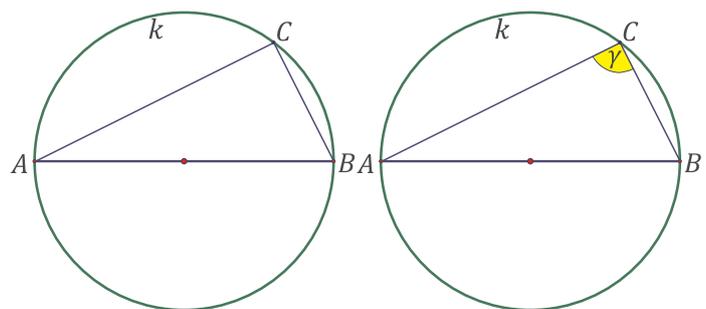
Beispiel: Satz des Thales

Voraussetzungen:

1. Scheitelpunkt (Eckpunkt) C liegt auf dem Kreis k .
2. \overline{AB} ist ein Durchmesser von k .

Behauptung:

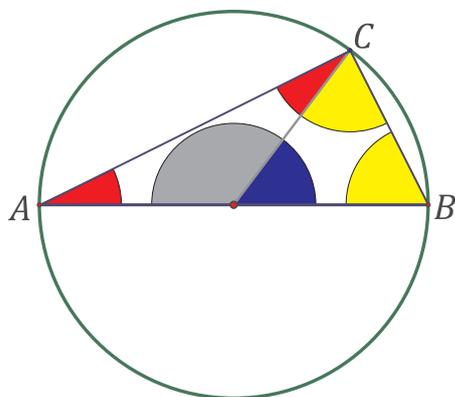
- γ ist ein rechter Winkel.



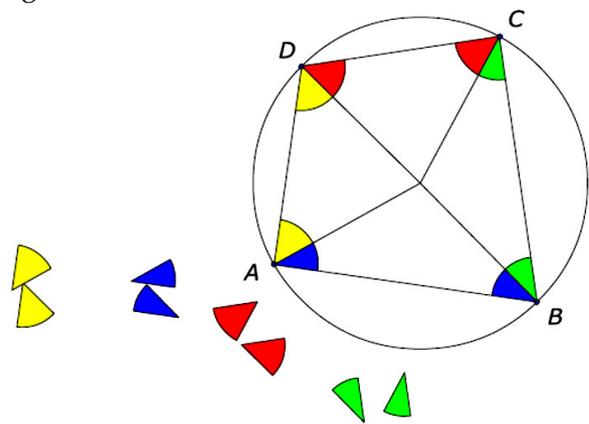
7.3.5 Anschauliche Vorgehensweisen beim Beweisen

- Gerade „Beweisanfänger“ sollte das Beweisen nicht durch eine zu komplizierte Sprache und auch nicht durch verwirrende Symbole (wie z. B. γ_1, \dots) erschwert werden.
- Es lohnt sich, nach Möglichkeiten zu suchen, Beweise ikonisch (bzw. „halbikonisch“) aufzubereiten.

„Halbikonischer“ Beweis des Satzes des Thales



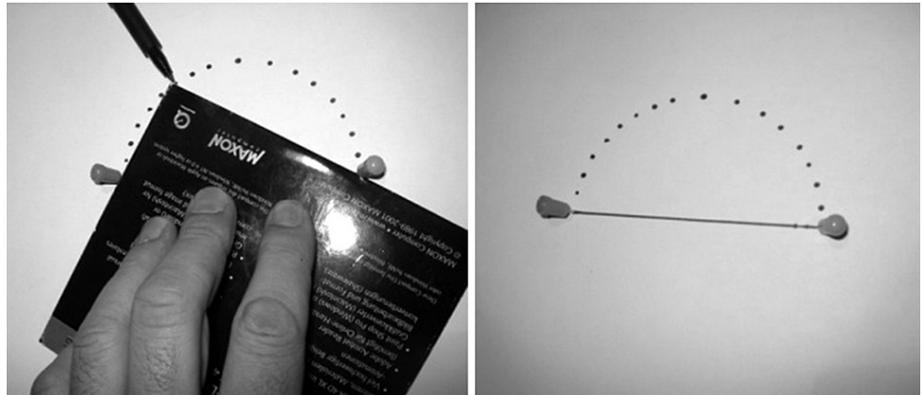
„Halbikonischer“ Beweis des Satzes über die Gegenwinkel im Sehnenviereck



7.4 Umkehrungen von Sätzen

- Umkehrungen von Sätzen sind ein heikles Problem.
- Oft identifizieren Schüler Sätze mit ihren Umkehrungen.
- Gegenbeispiele sind wichtig.

Enaktives Herausarbeiten der Umkehrung des Satzes des Thales



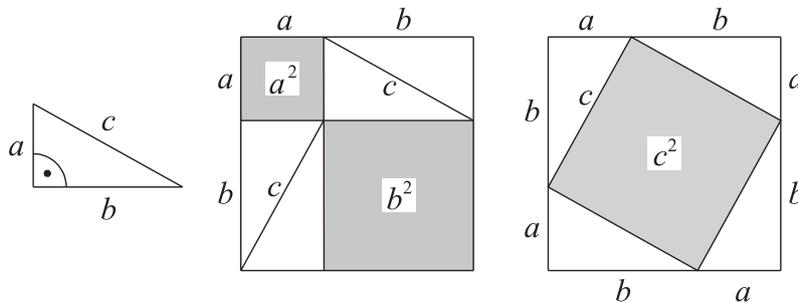
7.5 Arten von Beweisen

7.5.1 Zerlegungs-, Ergänzungsbeweise

Beweise bzw. Begründungen lassen sich oft auf recht unterschiedliche Arten führen; einige Vorgehensweisen sind im Mathematikunterricht besonders bedeutsam.

Zerlegungs- und Ergänzungsbeweise können teilweise unter Zuhilfenahme der Anschauung geführt werden.

Beispiel für einen Zerlegungs-/Ergänzungsbeweis (Satz des Pythagoras)



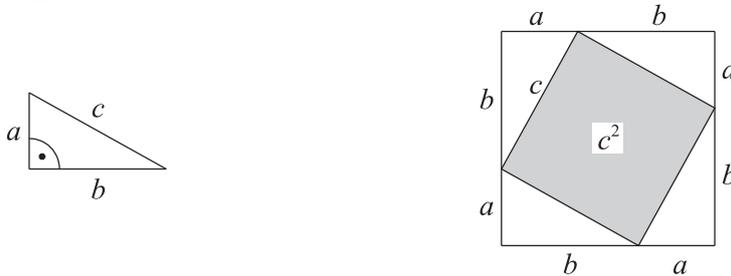
- Die beiden großen Quadrate haben jeweils die Seitenlänge $a + b$ und deshalb gleiche Flächeninhalte $(a + b)^2$.
- Außer den grau eingefärbten Quadraten enthalten diese beiden Quadrate jeweils viermal das Dreieck $\triangle ABC$. Die weißen Flächen haben also in beiden Quadraten den gleichen Flächeninhalt.
- Deshalb muss der Flächeninhalt der grauen Flächen in den beiden großen Quadraten ebenfalls gleich sein.
- $a^2 + b^2 = c^2$.

7.5.2 Berechnungsbeweise

Bei Berechnungsbeweisen folgt die Behauptung durch algebraische Umformungen von Gleichungen (z. B. zur Flächeninhalts- oder Volumenberechnung).

Beispiel für einen rechnerischen Beweis

Beweis des Satzes des Pythagoras mit Hilfe der Flächeninhaltsformel für rechtwinklige Dreiecke und der binomischen Formeln

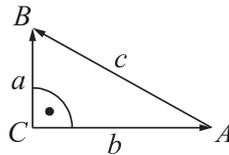


- Da der Flächeninhalt der vier Dreiecke (siehe Abb.) jeweils $\frac{ab}{2}$ beträgt, gilt:

$$c^2 = (a + b)^2 - 4 \cdot \frac{ab}{2} = (a + b)^2 - 2ab = a^2 + b^2.$$

7.5.3 Vektorielle Beweise

Beispiel: Vektorieller Beweis für den Satz des Pythagoras unter Nutzung des Skalarproduktes



- Da in einem bei C rechtwinkligen Dreieck ABC die Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{CB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{CA}$ orthogonal zueinander sind, ist ihr Skalarprodukt Null.

- Es gilt deshalb:

$$\begin{aligned} c^2 &= \vec{c} \cdot \vec{c} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB})^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} = a^2 + b^2. \end{aligned}$$

- Welchen „Haken“ hat dieser Beweis bei der in der Schule üblichen Einführung des Skalarproduktes?

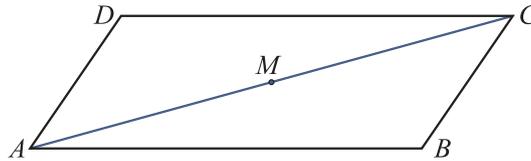
7.5.4 Abbildungsbeweise, Kongruenzbeweise, Ähnlichkeitsbeweise

- Bei einem *Abbildungsbeweis* wendet man eine Kongruenz- oder Ähnlichkeitsabbildung auf eine Figur oder eine Teilfigur an und begründet die Behauptung aufgrund der Eigenschaften dieser Abbildung.
- Ein *Kongruenzbeweis* stützt sich auf die Kongruenzsätze für Dreiecke: Man sucht in der Figur Paare von Teildreiecken und zeigt deren Kongruenz. Hieraus kann man auf gleich große Winkel oder gleich lange Strecken schließen.
- Ein *Ähnlichkeitsbeweis* zieht die Ähnlichkeitssätze für Dreiecke heran: Man sucht in der Figur Paare von Teildreiecken und zeigt deren Ähnlichkeit. Hieraus kann man auf gleiche Verhältnisse von Streckenlängen oder gleich große Winkel schließen.

Beispiel für einen Abbildungsbeweis

Satz: In jedem Parallelogramm sind gegenüberliegende Seiten gleich lang.

Ein Begründung bzw. ein Beweis kann mithilfe einer Punktspiegelung (Drehung um 180°) gegeben werden.



Anschauliche Begründung (auch mithilfe von Transparenzpapier):

- Eine Drehung um 180° um den Mittelpunkt M einer der Diagonalen des Parallelogramms bildet das Parallelogramm auf sich selbst ab (A auf C, B auf D, C auf A und D auf B).
- Also müssen \overline{AB} und \overline{CD} sowie \overline{BC} und \overline{DA} jeweils gleich lang sein.

Anschauliche Begründungen auf abbildungsgeometrischer Grundlage lassen sich exaktifizieren. Dazu müssen Eigenschaften der verwendeten Abbildungen (im obigen Beispiel betrifft dies die Punktspiegelungen) erarbeitet und verwendet werden.

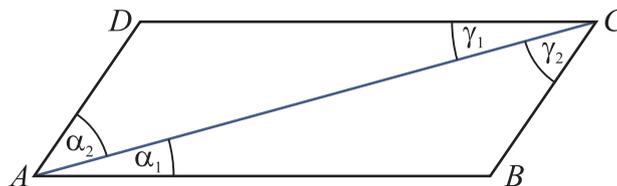
Eigenschaften von Punktspiegelungen:

- (S1) Die Verbindungsstrecke eines Punktes mit seinem Bildpunkt wird von dem Spiegelzentrum halbiert.
- (S2) Gerade und Bildgerade sind stets zueinander parallel.
- (S3) Der Schnittpunkt zweier Geraden wird auf den Schnittpunkt der Bildgeraden abgebildet.
- (S4) Punktspiegelungen sind involutorische Abb., d. h. aus $A \rightarrow B$ folgt $B \rightarrow A$.
- (S5) Strecken werden auf Strecken gleicher Länge abgebildet.

Ein exakter Beweis des o. g. Satzes unter Verwendung dieser Eigenschaften ist möglich, umfasst aber recht viele Schritte (vgl. HOLLAND: *Geometrie in der Sekundarstufe*, S. 62f).

Beispiel für einen Kongruenzbeweis

Satz: In jedem Parallelogramm sind gegenüberliegende Seiten gleich lang.



- Da $ABCD$ ein Parallelogramm ist, gilt: $AB \parallel DC$ und $AD \parallel BC$.
- α_1 und γ_1 sind Wechselwinkel an AB und $DC \Rightarrow \alpha_1 = \gamma_1$.
- α_2 und γ_2 sind Wechselwinkel an AD und $BC \Rightarrow \alpha_2 = \gamma_2$.
- In den beiden Dreiecken $\triangle ABC$ und $\triangle CDA$ gilt:
 $\overline{AC} = \overline{CA}$, $\angle CAB = \alpha_1 = \gamma_1 = \angle ACD$, $\angle BCA = \gamma_2 = \alpha_2 = \angle DAC$.
- Nach dem Kongruenzsatz „wsw“ sind die beiden Dreiecke kongruent: $\triangle ABC \cong \triangle CDA$.
- Also gilt $\overline{AB} = \overline{CD}$ und $\overline{BC} = \overline{DA}$.

Abbildungs- vs. Kongruenzmethode

Vorteile der Abbildungsmethode

- Anschaulichkeit
- unterschiedliche Niveaustufen möglich
- Einbeziehung der Symmetrieeigenschaften von Figuren

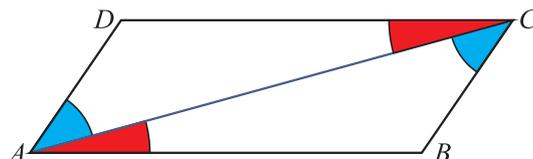
Nachteile der Abbildungsmethode

- unübersichtlich viele Eigenschaften der verschiedenen Abbildungen
- exakte Beweise sind oft recht lang
- „Unsicherheitsfaktor“

Vorteile der Kongruenzmethode

- besser überschaubares Feld an zu verwendenden Fakten (Definitionen, Kongruenzsätze, einige weitere Sätze)
- einfachere und kürzere Beweisdarstellung

Auch Kongruenzbeweise lassen sich oft recht anschaulich darstellen, ohne dass der wesentliche Inhalt verlorengehen muss.



- Da $ABCD$ ein Parallelogramm ist, gilt: $AB \parallel DC$ und $AD \parallel BC$.
- Die rot markierten Winkel sind gleich groß (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen).
- Die blau markierten Winkel sind gleich groß (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen).
- Die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle CDA$ haben eine gemeinsame Seite und stimmen in zwei Winkelgrößen überein.
- Nach „wsw“ sind die beiden Dreiecke kongruent.
- Deshalb ist $\overline{AB} = \overline{CD}$ und $\overline{BC} = \overline{DA}$.

In neueren Schulbüchern hat sich die Kongruenzmethode weitgehend durchgesetzt.

Beispiele für Ähnlichkeitsbeweise:

Beweise des Katheten- und des Höhensatzes mithilfe ähnlicher Teildreiecke (zu finden in vielen Gymnasiallehrbüchern der Klassenstufe 9, teilweise auch 8).

7.5.5 Direkte und indirekte Beweise

- Bei einem *direkten* Beweis wird eine unmittelbare und direkte Argumentationskette von den Voraussetzungen zur Behauptung aufgebaut, unter Einbeziehung bekannter Axiome und Sätze.
- Ein *Widerspruchsbeweis* (*indirekter Beweis*) wird geführt, indem man – zusätzlich zu den Voraussetzungen – die Verneinung der Behauptung annimmt und zeigt, dass diese Annahme letztlich in einen Widerspruch zu den Voraussetzungen mündet.

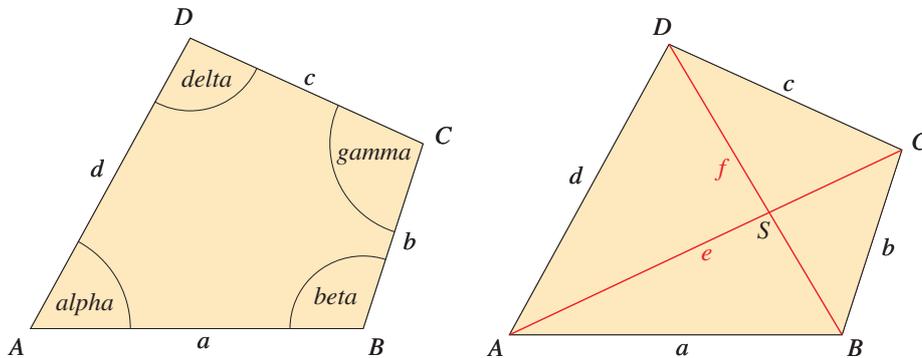
7.5.6 Existenz- und Eindeutigkeitsbeweise

- Bei einem *Existenzbeweis* ist zu zeigen, dass unter den gegebenen Voraussetzungen ein Objekt mit bestimmten Eigenschaften existiert.
- Bei einem *Eindeutigkeitsbeweis* ist zu zeigen, dass unter den gegebenen Voraussetzungen höchstens ein Objekt mit bestimmten Eigenschaften existiert (der Nachweis der Existenz dieses Objekts ist dann nicht Bestandteil des Beweises).

Eindeutigkeitsbeweise werden häufig als Widerspruchsbeweise geführt: Man nimmt an, dass zwei verschiedene Objekte mit den geforderten Eigenschaften existieren und führt diese Annahme zu einem Widerspruch.

2 Wie finde ich die Mitte?

Im Viereck $ABCD$ sind durch die Vorgaben von $a = 6 \text{ cm}$, $d = 4 \text{ cm}$ und $\alpha = 50^\circ$ die Ecken A , B und D festgelegt.



Ergänze dieses Dreieck durch einen weiteren Punkt C zu einem Viereck und versuche durch Variation der Lage von C zu erreichen, dass sich die Diagonalen halbieren.

Dies kannst du besonders gut mit einer DGS untersuchen. Gehe dabei auch von verschiedenen „Startdreiecken“ ABD aus und verschiebe dann den Punkt C .

Entsteht ein besonderes Viereck? Formuliere den von dir beobachteten Zusammenhang mit eigenen Worten und begründe ihn.

Tipp: Suche in deiner Figur geeignete Teildreiecke und betrachte die dabei auftretenden Winkel.

aus: Fokus 4 (Cornelsen, Gymnasium, Klasse 8)

Satz

Satz von der Mittelparallelen

Wenn eine Gerade durch den Mittelpunkt einer Dreiecksseite parallel zu einer anderen Dreiecksseite verläuft, dann halbiert sie die dritte Dreiecksseite.

Schema für einen Beweis

- Planfigur:** Markiere und bezeichne die aus der Voraussetzung bekannten Größen in einer Planfigur.
- Beweisidee:** Überlege, ob du Sätze (Kongruenzsätze, Winkelsätze, ...) kennst, in denen diese Größen vorkommen. Manchmal lohnt es sich, Hilfslinien einzuzeichnen.
- Voraussetzung:** Hier werden deine Voraussetzungen nacheinander aufgelistet.
- Behauptung:** Schreibe hier das gewünschte Ergebnis deiner Begründung auf.
- Beweis:** Schreibe hier Schritt für Schritt auf, wie sich aus deinen Beobachtungen an der Skizze die Behauptung ergibt. Begründe jeden Schritt, und achte darauf, dass du nirgends das verwendest, was du erst beweisen willst. Nutzen darfst du die Voraussetzungen, bereits bewiesene Teilschritte und schon früher als gültig erkannte Sätze.

Tipp

Beim Beweisen kann dir helfen:

- Markieren von bekannten Größen
- Hilfslinien einzeichnen
- Geeignete Bezeichnungen einführen
- Für Kongruenzbeweise: Suche kongruente Dreiecke in deiner Planfigur, die gegebene Stücke enthalten, so dass Kongruenzsätze anwendbar sind. Um die Kongruenz zu beweisen, suche nach gleichgroßen Seiten bzw. gleichweiten Winkeln und markiere sie farbig.

aus: Fokus 4 (Cornelsen, Gymnasium, Klasse 8)