Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät
Institut für Mathematik
Prof. Dr. A. Filler

Wintersemester 2019/20

Zusammenfassende Notizen zur Vorlesung

Einführung in die Mathematikdidaktik und Didaktik der Geometrie
Teil 8

8 Konstruieren im Geometrieunterricht

- Konstruieren wird von Lernenden als *DIE* für die Geometrie typische Tätigkeit angesehen.
- Konstruieren ist aber auch eng mit anderen zentralen Aspekten des Geometrieunterrichts verknüpft:
  – *Entdecken* von Sätzen und Zusammenhängen,
    - besondere Linien und Punkte im Dreieck,
    - Satz von Varignon,
    - ...

  – *Beweisen* (Konstruktionsvorschriften als Existenzbeweise),

  – *Begriffsbildung* (konstruktive Bildung von Begriffen),

  – *Problemlösen* (Konstruktionsprobleme).

8.1 Arten von Konstruktionen

Es sind bei geometrischen Konstruktionen verschiedene Exaktheitsstufen möglich. Außerdem hängen Konstruktionen von den verwendeten Hilfsmitteln (Zirkel und Lineal, Skaleneinteilung, Geodreieck, Computer mit zusätzlichen Werkzeugen) ab.

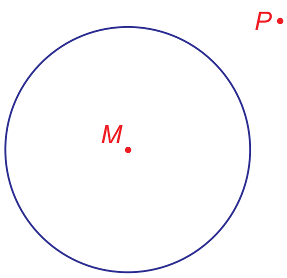
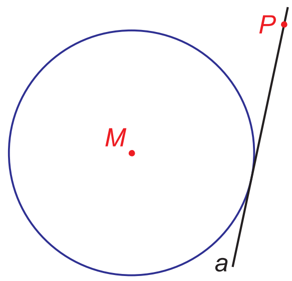
- Konstruktion nach Augenmaß – evtl. unter Nutzung materieller Hilfsmittel (Faden, Zylinder);
- Konstruktion unter Verwendung des Geodreiecks;
- Konstruktion mit Zirkel und Lineal $\rightarrow$ DIE „eigentlichen“ (klassischen) Konstruktionen;
- Konstruktion mit DGS (Dynamische Geometrie-Software):
  - Nachvollziehen einer Konstruktion mit Zirkel und Lineal,
  - Nutzung spezifischer Möglichkeiten von DGS.

8.2 Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

Beispiel:

Gegeben sind ein Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r sowie ein Punkt P außerhalb des Kreises. Konstruiere eine Tangente an den Kreis, die durch P verläuft.

Ausgangskonfiguration	*Zielkonfiguration*
Gegeben sind ein Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r sowie ein Punkt P außerhalb des Kreises.	Konstruiere eine Tangente an den Kreis, die durch P verläuft.
Objekte: Kreis $k(M,r)$, Punkt P *Bedingungen:* P liegt außerhalb von $k(M,r)$	*Objekte:* Kreis $k(M,r)$, Punkt P, Gerade a *Bedingungen:* P liegt außerhalb von $k(M,r)$, $P \in a$, a ist Tangente an $k(M,r)$

Ausgangskonfiguration	*Zielkonfiguration*
	

Konstruktionsbeschreibung	*Bemerkungen*
Zeichne die Strecke $\overline{MP}$.	
Zeichne den Mittelpunkt von $\overline{MP}$, nenne ihn N.	Mit Zirkel und Lineal: mehrschrittige Konstruktion.
Zeichne den Kreis $k(N,R)$ mit dem Radius $R = \overline{NP}$.	
Markiere einen der beiden Schnittpunkte des Kreises $k(N,R)$ mit dem Kreis $k(M,r)$, nenne ihn A.	
Zeichne die Gerade $g(P,A)$, nenne sie a.	
Ergebnis: a ist eine gesuchte Tangente.	WARUM? Wie kommt man darauf?

8.3 Durchführbarkeit und Richtigkeit einer Konstruktion

Durchführbarkeit einer Konstruktion

- Für jeden Konstruktionsschritt muss die Durchführbarkeit gewährleistet sein.

  Das gilt insbesondere für das Markieren von Schnittpunkten.

$\rightarrow$ Die *Objekte der Zielkonfiguration* müssen wirklich entstehen.

Aufgabe: Begründen Sie die Durchführbarkeit der angegebenen Tangentenkonstruktion (für jedes Objekt, das in der Konstruktion entsteht).

Richtigkeit einer Konstruktion

- Eine geometrische Konstruktion muss richtig sein.

→ Die *Bedingungen der Zielkonfiguration* müssen erfüllt sein.

Aufgabe: Wodurch ist die Richtigkeit der angegebenen Tangentenkonstruktion gesichert?

8.4 Phasen im Konstruktionsprozess

Heuristische Phase (Finden von Ansätzen und Wegen, Probleme zu lösen)

- Verstehen der Aufgabe; Ausgangs- und Zielkonfiguration
- Entwickeln eines Lösungsplans
- Evtl. Beachten von Fallunterscheidungen, Durchführbarkeit

Algorithmische Phase

- Durchführen der Konstruktion
- Dokumentation der Lösung (Konstruktionsbeschreibung)

Analytische Phase

- Begründung der Richtigkeit der Konstruktion
- Überlegungen zur Eindeutigkeit der Lösung(en)

8.5 Fallunterscheidungen

Mitunter sind bei Konstruktionen *Fallunterscheidungen* notwendig.

Beispiel: Es wird bei der Aufgabe

> *Gegeben sind ein Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r sowie ein Punkt P. Konstruiere eine Tangente an den Kreis, die durch P verläuft.*

auf die ursprüngliche Bedingung *„Punkt P außerhalb des Kreises“* verzichtet.

- Welche Fälle sind zu unterscheiden?
- Welche Konsequenzen ergeben sich für die Durchführbarkeit und die Richtigkeit der Konstruktion?

Beispiel: *Gegeben sind drei Strecken a, b und c. Konstruiere ein Dreieck DEF, dessen Seiten zu a, b und c kongruent (gleich lang) sind.*

- Geben Sie eine Konstruktionsvorschrift an. Sind Fälle zu unterscheiden?
- Argumentieren Sie zur Durchführbarkeit und zur Richtigkeit der von Ihnen angegebenen Konstruktion. Welche Konsequenzen ergeben sich aus den unterschiedenen Fällen?

8.6 Konstruktionen mit dem Computer

- Mithilfe dynamischer Geometriesoftware (DGS) können Konstruktionen mit Zirkel und Lineal sowie auch Konstruktionen mithilfe des Geodreiecks „nachvollzogen“ werden.
- Es ergeben sich aber auch „neue“ Aspekte und Möglichkeiten.
  - Dynamische Abhängigkeiten (Zugmodus)
  - Aufzeichnung von Ortskurven
    – Neue Konstruktionsmöglichkeiten, z. B. Gärtnerkonstruktion
  - Erzeugung neuer „Werkzeuge“ bzw. „Makros“
    – Thaleskreis als neue *„Grundkonstruktion“*
    – Modulares Arbeiten

8.7 Grundkonstruktionen und Standardkonstruktionen

Grundkonstruktionen:

Konstruktionen, die *mit dem jeweiligen Werkzeug* in einem Schritt erzeugt werden können

Mit *Zirkel und Lineal* lassen sich – bei gegeben Punkten A und B – vier Grundkonstruktionen durchführen:

- Kreis mit Mittelpunkt A bzw. B und Radius $\overline{AB}$ zeichnen;
- Gerade durch die Punkte A und B zeichnen;
- Halbgerade ausgehend von Punkt A durch B zeichnen;
- Strecke $\overline{AB}$ zeichnen.

Bei Verwendung des *Geodreiecks* gibt es weitere Grundkonstruktionen, z. B.

- Zeichnen von Senkrechten und Parallelen,
- Abtragen von Winkeln.

Weitere Grundkonstruktionen ergeben sich bei anderen Werkzeugen:

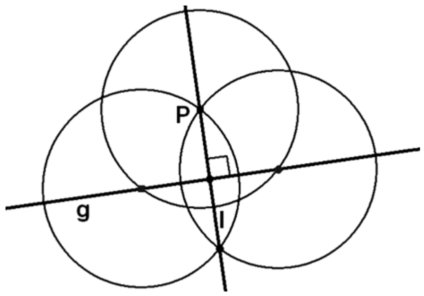
- Beim Falten von Papier ist das Erzeugen des Bildes bei einer Achsenspiegelung eine Grundkonstruktion.
- Computer … vielfältige Konstruktionen sind in einem Schritt möglich.

Standardkonstruktionen

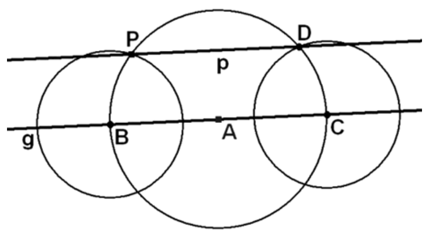
- oft ausgeführte Verbindungen mehrerer Grundkonstruktionen
- Begriff nicht eindeutig definiert

Beispiele für Standardkonstruktionen mit Zirkel und Lineal:

- Strecke übertragen,
- Winkel übertragen,
- Mittelpunkt einer Strecke konstruieren,
- Winkel halbieren,
- Lot auf eine Gerade durch einen Punkt konstruieren,
- Parallele zu einer Geraden durch einen Punkt konstruieren.



Standardkonstruktion: Lot



Standardkonstruktion: Parallele

Bei der Verwendung anderer Konstruktionswerkzeuge, z. B. des Geodreiecks können *Standardkonstruktionen zu Grundkonstruktionen* werden.

Während sich Grundkonstruktionen durch die „Einschrittregel“ festlegen lassen, ist der Begriffsumfang von Standardkonstruktionen nicht eindeutig festzulegen. Er lässt sich nur pragmatisch durch die Häufigkeit, Bedeutung und Komplexität einer Konstruktion eingrenzen.

$\rightarrow$ Standardkonstruktionen als „*Module*“

8.8 Modulares Arbeiten

Werden *mehrere einzelne Konstruktionsschritte* zu einer Einheit zusammengefasst und als Ganzes betrachtet, so spricht man von einem *Baustein* oder *Modul* (in DGS: „Werkzeug", „Makro").

Beispiel:

Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck ΔABC mit einer Hypotenuse c von 8 cm Länge und einer Höhe h von 3 cm.

Konstruktionsbeschreibung mithilfe der Module „Parallele im Abstand d" und „Thaleskreis":

- Zeichne Strecke $\overline{AB}$ mit 8 cm Länge;
- Zeichne Parallele p zur Strecke $\overline{AB}$ mit Abstand 3 cm;
- Ein Schnittpunkt des Thaleskreises über der Strecke $\overline{AB}$ mit p ist der gesuchte Punkt C des Dreiecks ΔABC.

Module:

- Konstruktionen (Operationen, Funktionen, Prozeduren) die eine *Ausgangskonfiguration in einem Schritt in eine Zielkonfiguration* überführen;
- *mentale Grundkonstruktionen*;
- *sprachliche Zusammenfassungen* in (Konstruktionsbeschreibgn.)

→ Das Operieren mit Modulen ist auch ein *Operieren auf der begrifflichen Ebene*.

- *Grundkonstruktionen für das Werkzeug*, das ihre Realisierung erlaubt (Geodreieck, Reißbrett, Computer).
- „Modulares Konstruieren": bereits durchgeführte Konstruktionen *werden als Bausteine in anderen Konstruktionen weiter verwendet*.
- Bereits EUKLID verwendete in den „Elementen" Module: führte z. B. die Halbierung einer Strecke auf „Konstruktion eines gleichseitigen Dreiecks" und „Konstruktion der Winkelhalbierenden" zurück.
- Modulares Arbeiten: *heuristische Strategie*