Didaktik der Analysis und der Analytischen Geometrie/ Linearen Algebra

7. Analytische Geometrie I: Parameterdarstellungen, affine Geometrie

A. Filler

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik

Sommersemester 2018

Internetseite zur Vorlesung:

`http://www.mathematik.hu-berlin.de/~filler/` $\rightarrow$ Lehre

Analytische Geometrie I: Parameterdarstellungen, affine Geometrie

Kernideen zur (analytischen) Raumgeometrie

Koordinatisieren

Parameterdarstellungen

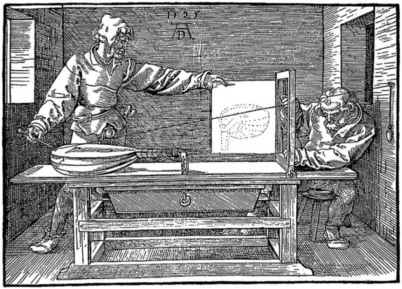
Parameterdarstellungen und Gleichungen von Geraden
Parameterdarstellungen und Gleichungen von Ebenen

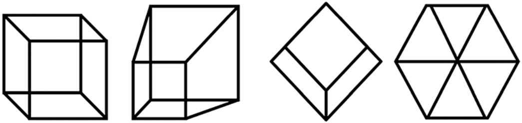
Funktionales Denken im Zusammenhang mit Parameterdarstellungen

– Ausgangspunkt: Geraden
– Variationen der Parameterdarstellung des Einheitskreises

Kernideen zur (analytischen) Raumgeometrie[1]

1. „Drei Dimensionen in zwei einzupacken, ist eine Kunst."





Schattenbilder eines Würfels:
Wann sieht der Würfel realistisch oder gerade nicht realistisch aus?

[1] Leuders, T. (2004): Raumgeometrie: Ein Unterricht mit Kernideen. In: Der Mathematikunterricht, 50 (1-2), S. 5-28.

2. „Mit Zahlen kann man Orte finden.“

(Geographische Koordinaten, Planquadrate auf Landkarten (Grundriss von Mannheim), Schach, Schiffe versenken, ...)

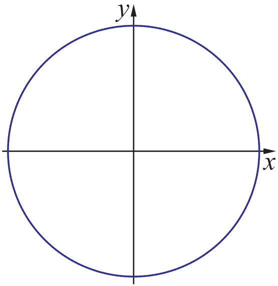
> *Alle Probleme der Geometrie können leicht auf einen solchen Ausdruck gebracht werden, dass es nachher nur der Kenntnis der Länge gewisser gerader Linien bedarf, um diese Probleme zu konstruieren.*
>
> René Descartes (1637)

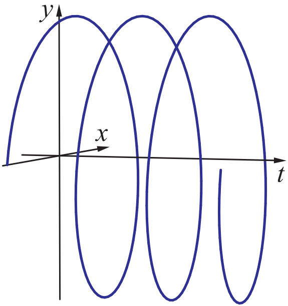
Kernideen zur (analytischen) Raumgeometrie

3. „Der Raum ist erfüllt von Bewegungsspuren.“

- zeitliche Abhängigkeit
- dynamische Aspekte
- Ortslinien
- Computernutzung

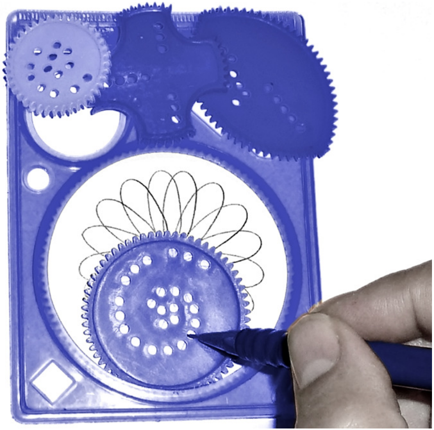
3. „Der Raum ist erfüllt von Bewegungsspuren."





- zeitliche Struktur einer Bewegung
- räumliche Struktur der durchlaufenen Orte
- gleichzeitige Kodierung der räumlichen und zeitlichen Struktur

3. „Der Raum ist erfüllt von Bewegungsspuren.“



Was kann man mit einem Spirographen zeichnen?

Kernideen zur (analytischen) Raumgeometrie

Koordinatisieren

Parameterdarstellungen

Parameterdarstellungen und Gleichungen von Geraden

Parameterdarstellungen und Gleichungen von Ebenen

Funktionales Denken im Zusammenhang mit Parameterdarstellungen

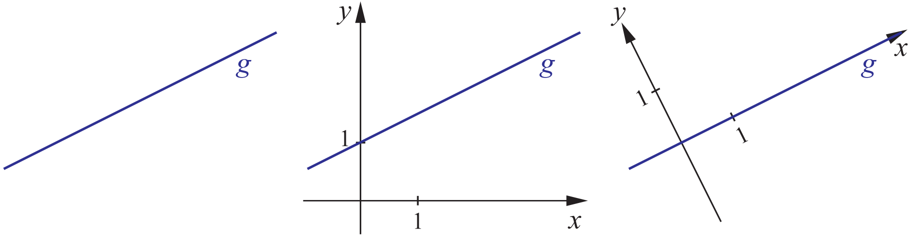
– Ausgangspunkt: Geraden

– Variationen der Parameterdarstellung des Einheitskreises

Koordinatisieren

- Erfahrungen mit Koordinatendarstellungen schon in der Sek. I
- Geraden als Graphen linearer (bzw. „affin-linearer“) Funktionen
- Beschreibung von Geraden durch implizite Gleichungen (bei der Behandlung der LGS)
- ABER: i. Allg. sind Gleichungen vorgegeben, nicht geom. Objekte

Grundlegende Strategie:
Wahl eines problemadäquaten Koordinatensystems



a) Aufgabe:
Gib eine Gleichung von g an.

b) 1. Lösung:
$y = 0.5x + 1$

c) 2. Lösung:
$y = 0$

Kernideen zur (analytischen) Raumgeometrie

Koordinatisieren

Parameterdarstellungen

Parameterdarstellungen und Gleichungen von Geraden
Parameterdarstellungen und Gleichungen von Ebenen

Funktionales Denken im Zusammenhang mit Parameterdarstellungen

– Ausgangspunkt: Geraden
– Variationen der Parameterdarstellung des Einheitskreises

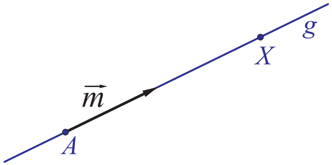
Problematisch:

Zwei unterschiedliche Auffassungen des Begriffs „Parameter" (als „veränderbare Konstante" und als Variable)

Beschreibungen von Geraden

- Graphen linearer Funktionen in der Sekundarstufe I
- In der Ebene: Lösungsmengen linearer Gleichungen $ax + by = c$ mit zwei *Lösungsvariablen* x und y sowie *Koeffizienten* a, b, c
- Im Raum ist das komplizierter (zwei Gleichungen mit drei Variablen)
- Parameterdarstellungen sind in der Ebene und im Raum gleich:

  $g = \{X \mid X = A + t\cdot\vec{m},\ t \in \mathbb{R}\}$ oder kurz $g : X = A + t\cdot\vec{m},\ t \in \mathbb{R}$
- Wird der Parameter „voll durchlaufen“, so erhält man die Gerade; „dynamischer Aspekt“ der Parameterdarstellung
- Parameter als Variable im Einsetzungsaspekt



Parameterdarstellungen

Beschreibungen von Ebenen

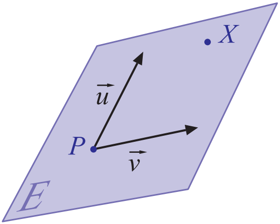
- Ebene als Lösungsmenge eines LGS mit einer Gleichung und drei Lösungsvariablen
- Parameterdarstellung:

  $$E = \{X \mid X = P + s\cdot\vec{u} + t\cdot\vec{v},\ \ s,t \in \mathbb{R}\}$$

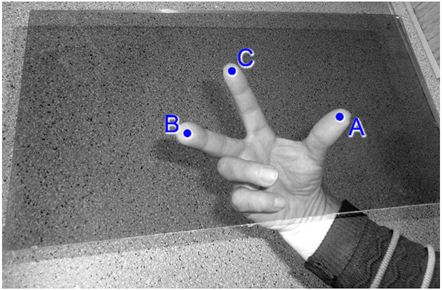
  oder kurz

  $$E : X = P + s\cdot\vec{u} + t\cdot\vec{v}$$

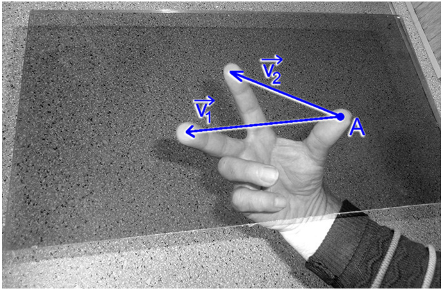
  mit den reellen Parametern s und t
- Umwandlung Parameterdarstellung $\leftrightarrow$ Gleichung



Veranschaulichung der Parameterdarstellungen von Ebenen



Ebene durch drei Punkte



Ebene mit Spannvektoren

Zweidimensionale Veranschaulichung von Geraden und Ebenen im Raum: Spurpunkte und Spurgeraden

Gerade:

$g : \vec{x} = (-3\,|\,6\,|\,9) + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$

Spurpunkte:

$(3|2|0)$,

$(6|0|-4{,}5)$,

$(0|4|4{,}5)$

Ebene

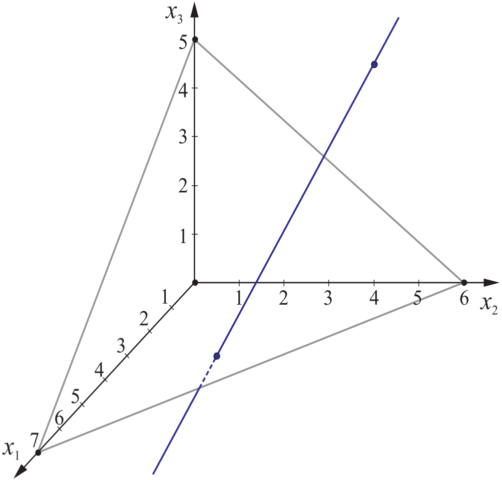
$E\colon 30\,x_1 + 35\,x_2 + 42\,x_3 = 210$

Achsenschnittpunkte:

$(7\,|\,0\,|\,0)$,

$(0\,|\,6\,|\,0)$,

$(0\,|\,0\,|\,5)$



Untersuchung von Lagebeziehungen zwischen Geraden, Ebenen, Geraden und Ebenen

- Lösen von LGS
- Lineare Abhängigkeit (Kollinearität und Komplanarität) von Richtungs- und Verbindungsvektoren

Kernideen zur (analytischen) Raumgeometrie

Koordinatisieren

Parameterdarstellungen

Parameterdarstellungen und Gleichungen von Geraden

Parameterdarstellungen und Gleichungen von Ebenen

Funktionales Denken im Zusammenhang mit Parameterdarstellungen

– Ausgangspunkt: Geraden

– Variationen der Parameterdarstellung des Einheitskreises

Intentionen

- Funktionales Denken im Zusammenhang mit Parameterdarstellungen
- Vernetzungen Analytische Geometrie – Analysis (zumindest ansatzweise)
- Anknüpfen an Sekundarstufe I: Elementargeometrie, Trigonometrie
- Formenvielfalt, ästhetischer Reiz

Aspekte funktionalen Denkens[2]

- Durch Funktionen beschreibt oder stiftet man Zusammenhänge zwischen Größen: einer Größe ist eine andere zugeordnet ...
- Durch Funktionen erfasst man, wie Änderungen einer Größe sich auf eine abhängige Größe auswirken.
- Mit Funktionen betrachtet man einen gegebenen oder erzeugten Zusammenhang als Ganzes.

- Notwendig für das Erfassen funktionaler Aspekte bei Par.darst.: Auffassung geometrischer Objekte als Punktmengen[3]
- Zuordnung $t \mapsto P(t)$; bei Ebenen: $(u; v) \mapsto P(u, v)$
- Aspekt Änderungsverhalten korrespondiert mit einer dynamischen Sicht: Geraden / Kurven als Bahnkurven, Parameter – Zeit

[2] VOLLRATH, H.-J.: Funktionales Denken. In: *JMD* 10 (1989), S. 3-37.

[3] Bereits hierbei bestehen erhebliche Defizite, vgl. WITTMANN, G.: *Schülerkonzepte zur Analytischen Geometrie* (2003).

Aspekte funktionalen Denkens[4]

- Durch Funktionen beschreibt oder stiftet man Zusammenhänge zwischen Größen: einer Größe ist eine andere zugeordnet …
- Durch Funktionen erfasst man, wie Änderungen einer Größe sich auf eine abhängige Größe auswirken.
- Mit Funktionen betrachtet man einen gegebenen oder erzeugten Zusammenhang als Ganzes.

- Manipulierender Umgang:[5] Objekt (z. B. Gerade) wird „eingekapselt“ als Ganzes betrachtet und durch Aufpunkt und Richtungsvektor manipuliert.
- Reflektierender Umgang: Herstellung von Beziehungen zwischen dem Objekt als Ganzem und der zugrunde liegenden Zuordnung.

[4] VOLLRATH, H.-J.: Funktionales Denken. In: *JMD* 10 (1989), S. 3-37.

[5] VOM HOFE, R.: Über den manipulierenden und reflektierenden Umgang mit Funktionen. In: *MU* 50 (2004), 6, S. 47-56.

Parameterdarstellungen als Funktionen

Ansätze, um den Punktmengengedanken und den Aspekt funktionaler Zusammenhänge bei Parameterdarstellungen stärker einzubeziehen:

(1) Konstruktion von durch Parameterdarstellungen gegebenen Geraden als Punktmengen;

- Umkehrüberlegungen: welchen Parameterwerten sind bestimmte Punkte zugeordnet
- Vergleiche verschiedener Parametrisierungen derselben Objekte

(2) Betonung der dynamischen Sicht auf Geraden (und andere Kurven) als Bahnkurven;

- Interpretation des Parameters als Zeit:
  – Bezüge zur Beschreibung von Bewegungen in der Physik
  – Computeranimationen

Animationen – Interpretation des Parameters als Zeit

- Animationen erfordern zeitabhängige Beschreibungen von Positionen oder anderen Eigenschaften von Objekten.
- Interpretation des Parameters als Zeit in der Parameterdarstellung einer Geraden

$$P = P_0 + t \cdot \vec{a}$$

Animationen – Interpretation des Parameters als Zeit

- Parameterdarstellungen erhalten einen Aspekt, der die geometrische Gestalt der durch sie beschriebenen Objekte nicht beeinflusst:

  Geschwindigkeit von Bewegungen.

Beispiel:

$$\begin{array}{lrcll} \text{a)} & P(t) & = & P_0 + t \cdot \vec{a} & (t \in \mathbb{R}_+) \quad \text{und} \\ \text{b)} & P(t) & = & P_0 + t^2 \cdot \vec{a} & (t \in \mathbb{R}_+) \end{array}$$

- Zusammensetzung (Addition) von geradlinigen Bewegungen kann zu nichtlinearen Bahnkurven führen.

Beispiel: Schräger Wurf

$$P(t) = P_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2}\,\vec{g} \cdot t^2$$

Kernideen zur (analytischen) Raumgeometrie

Koordinatisieren

Parameterdarstellungen

Parameterdarstellungen und Gleichungen von Geraden

Parameterdarstellungen und Gleichungen von Ebenen

Funktionales Denken im Zusammenhang mit Parameterdarstellungen

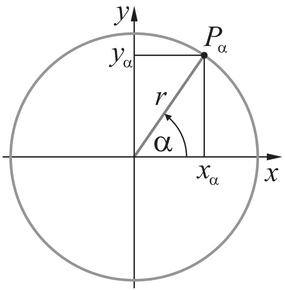
– Ausgangspunkt: Geraden

– Variationen der Parameterdarstellung des Einheitskreises

Kurven durch Variation des Einheitskreises

- Sinus und Kosinus am Einheitskreis (Sekundarstufe I):

$$\sin\alpha = y_\alpha \qquad \cos\alpha = x_\alpha$$



- Verallgemeinerungen:

$$\begin{aligned} x(\alpha) &= r\cdot\cos\alpha \\ y(\alpha) &= r\cdot\sin\alpha \end{aligned} \qquad \alpha\in[0;2\pi)$$

$$\begin{aligned} x(\alpha) &= x_M + r\cdot\cos\alpha \\ y(\alpha) &= y_M + r\cdot\sin\alpha \end{aligned} \qquad \alpha\in[0;2\pi)$$

- Parameterdarstellung eines Kreises mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung nach Ersetzen des Parameters:

$$\begin{aligned} x(t) &= r\cdot\cos(2\pi\cdot t) \\ y(t) &= r\cdot\sin(2\pi\cdot t) \end{aligned} \qquad t\in[0;1)$$

Die Substitution des Parameters mittels $\alpha = 2\pi\cdot t$ ist sinnvoll, wenn noch andere Größen durch den Parameter ausgedrückt werden sollen.

Fragen zur Modifikation des Einheitskreises

1. Welche Kurve beschreibt ein Punkt, der sich um ein Zentrum bewegt und sich dabei gleichzeitig von dem Zentrum entfernt?
2. Welche Kurve beschreibt ein Punkt im Raum, der sich um ein Zentrum bewegt und simultan dazu seine Höhe (beschrieben z. B. durch die z-Koordinate) verändert?

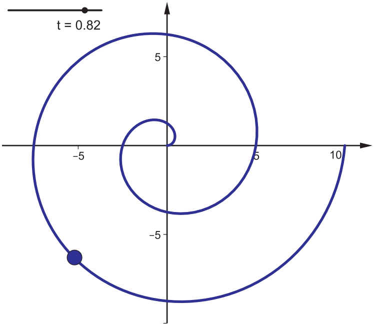
- Radius als Funktion des Parameters
- Kreis

$$\begin{aligned} x(t) &= r \cdot \cos(2\pi \cdot t) \\ y(t) &= r \cdot \sin(2\pi \cdot t) \end{aligned} \qquad t \in [0;1)\,;\ r = \text{const}$$

Variationen an Parameterdarstellungen von Kreisen

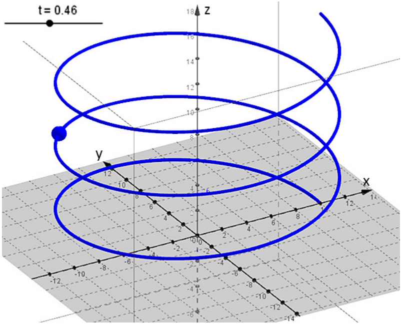
- Radius als Funktion des Parameters
- Archimedische Spirale

$$\begin{aligned} x(t) &= r \cdot t \cdot \cos(4\pi \cdot t) \\ y(t) &= r \cdot t \cdot \sin(4\pi \cdot t) \end{aligned} \qquad t \in [0; 1]\,;\ r = \text{const}$$



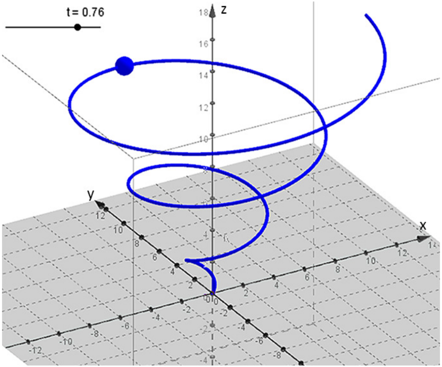
- „Höhe“ (bisher konstante Koordinate) als Funktion des Parameters
- Schraubenlinie (Helix, zylindrische Spirale)

$$\begin{aligned} x(t) &= r \cdot \cos(6\pi \cdot t) \\ y(t) &= r \cdot \sin(6\pi \cdot t) \qquad t \in [0;1]\,;\ r, h = \text{const} \\ z(t) &= h \cdot t \end{aligned}$$



- Kombination beider Variationen
- Konische Spirale

$$\begin{aligned} x(t) &= r \cdot t \cdot \cos(6\pi \cdot t) \\ y(t) &= r \cdot t \cdot \sin(6\pi \cdot t) \qquad t \in [0;1]\,;\; r, h = \text{const} \\ z(t) &= h \cdot t \end{aligned}$$

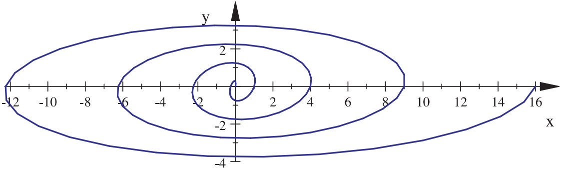


„Halbquadratische Schnecke“*

Die „halbquadratische Schnecke“ ist eine Variation der Archimedischen Schnecke.

Eine der Koordinaten (hier x) hängt vom Quadrat des Parameters t ab.

$$
\begin{aligned}
x(t) &= t^2 \cdot \cos(2\pi t) \\
y(t) &= t \cdot \sin(2\pi t)
\end{aligned}
$$

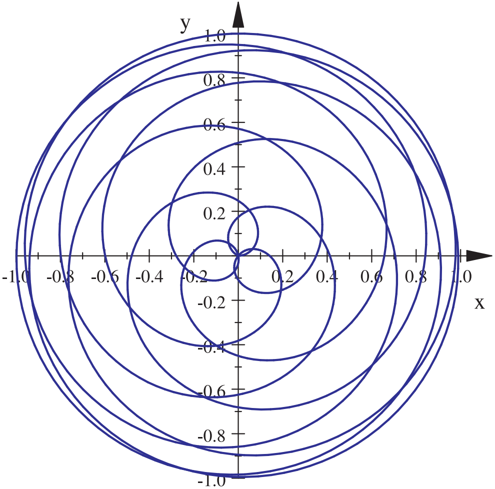


* Die Bezeichnungen in Anführungsstrichen wurden den Kurven von den Teilnehmerinnen und Teilnehmern des Kurses gegeben.

„Sinuskreis“

Diese Kurve entsteht durch Abhängigkeit des Radius von $\sin(t)$.

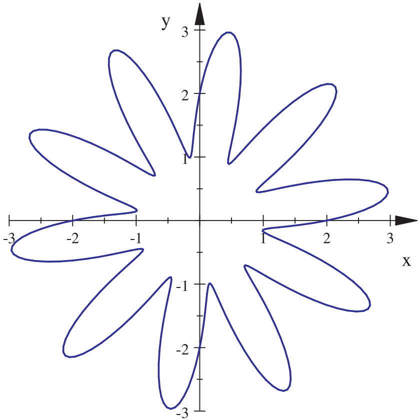
$$\begin{aligned} r(t) &= \sin(t) \\ x(t) &= r(t) \cdot \cos(2\pi t) \\ y(t) &= r(t) \cdot \sin(2\pi t) \end{aligned}$$



„Blumenkurve“

Ähnlich wie beim Sinuskreis ergibt sich hier für $r(t)$ die Wertemenge {1;3}. Dadurch entsteht die Blütenform der Kurve.

$$\begin{aligned} r(t) &= 2 + \sin(20\pi t) \\ x(t) &= r(t) \cdot \cos(2\pi t) \\ y(t) &= r(t) \cdot \sin(2\pi t) \end{aligned}$$

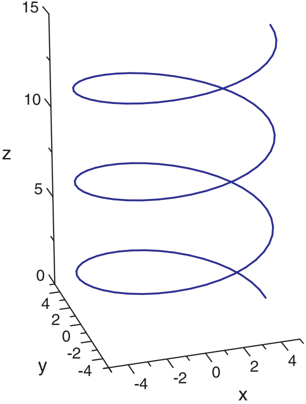


Ausgewählte 3D-Kurven

Raumhelix

Eine der einfachsten dreidimensionalen Kurven ist die Raumhelix (Schraubenlinie). Betrachtet man nur $x(t)$, $y(t)$ ergibt sich ein Kreis. Dieser wird von $z(t) = t$ schraubenförmig auseinandergezogen.

$$\begin{aligned} x(t) &= r \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot t) \\ y(t) &= r \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot t) \\ z(t) &= t \end{aligned}$$



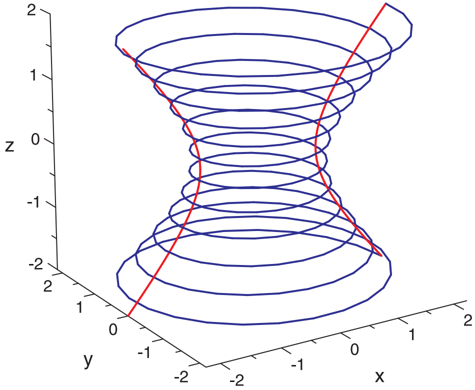
„Hyperbelschnecke“

Die „Hyperbelschnecke“ basiert auf einer Raumhelix, die sich aufgrund einer Hyperbel als Hüllkurve um ein Hyperboloid windet.

$$\begin{aligned} r &= h(t) \\ h(t) &= \sqrt{t^2+1} \\ x(t) &= r \cdot \cos(6\pi t) \\ y(t) &= r \cdot \sin(6\pi t) \\ z(t) &= t \end{aligned}$$

Hüllkurve:

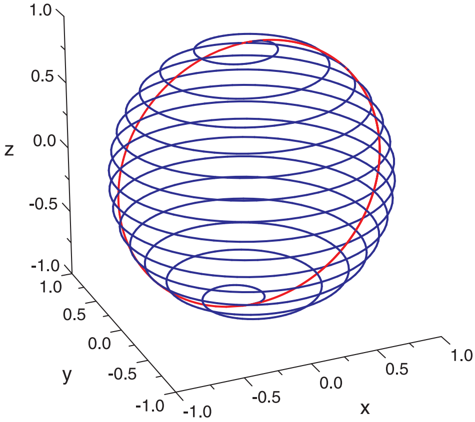
$$\begin{aligned} x(t) &= \pm h(t) \\ y(t) &= 0 \\ z(t) &= t \end{aligned}$$



„Kugelschnecke“

Anders als bei der „Hyperbelschnecke“ wurde hier ein Kreis als Hüllkurve verwendet.

$$\begin{aligned} r &= h(t) \\ h(t) &= \sqrt{1-t^2} \\ x(t) &= r \cdot \cos(14\pi t) \\ y(t) &= r \cdot \sin(14\pi t) \\ z(t) &= t \end{aligned}$$



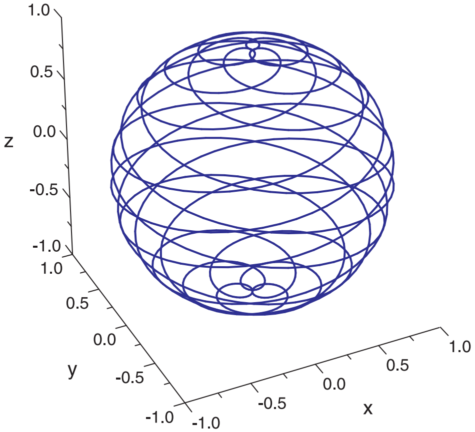
Hüllkurve:

$$\begin{aligned} x(t) &= \pm h(t) \\ y(t) &= 0 \\ z(t) &= t \end{aligned}$$

„Ballkurve“

Eine weitere Kugel ergibt sich, wenn man den „Sinuskreis“ in der dritten Dimension von $\cos(t)$ abhängen lässt.

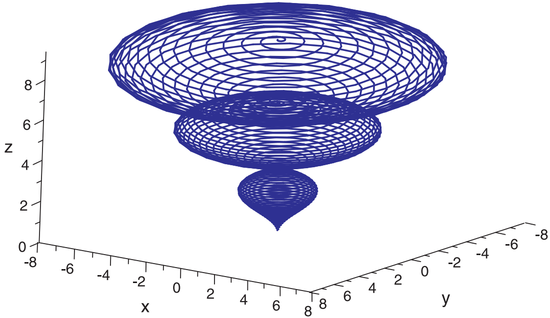
$$\begin{aligned} r(t) &= \sin(t) \\ x(t) &= r(t) \cdot \cos(2\pi t) \\ y(t) &= r(t) \cdot \sin(2\pi t) \\ z(t) &= \cos(t) \end{aligned}$$



„Kronleuchter“

Der „Kronleuchter“ ergibt sich aus einer Raumhelix mit Radiusfunktion $r(t) = t \cdot \sin(t)$.

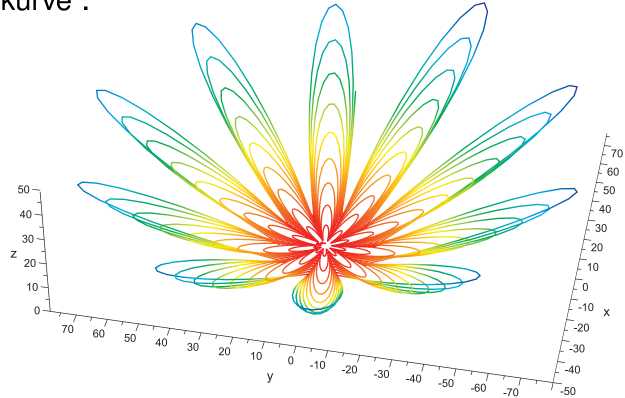
$$
\begin{aligned}
r(t) &= t \cdot \sin(t) \\
x(t) &= r(t) \cdot \cos(20\pi t) \\
y(t) &= r(t) \cdot \sin(20\pi t) \\
z(t) &= t
\end{aligned}
$$



„Blumenkurve“

Durch gezieltes Ausprobieren entstand eine Kurve, die Ähnlichkeiten zu einer Blüte aufweist. Zu Grunde lag die zweidimensionale „Blumenkurve“.

$$
\begin{aligned}
r &= 5 \\
s(t) &= 1 + r \cdot t + 0.7 \cdot \sin(t \cdot 20 \cdot \pi) \\
x(t) &= s(t) \cdot \cos(2 \cdot t \cdot \pi) \\
y(t) &= s(t) \cdot \sin(2 \cdot t \cdot \pi) \\
z(t) &= 0.01 \cdot r^2 \cdot (1 + \sin(20 \cdot t \cdot \pi)) \cdot t^2
\end{aligned}
$$



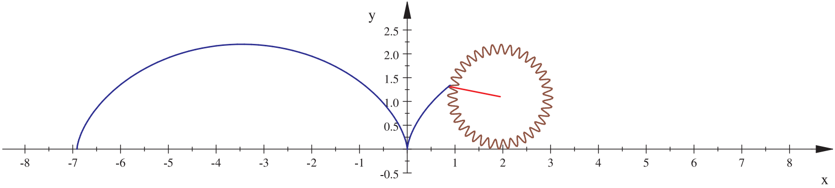
ENDE

Zykloiden

Welche Kurve beschreibt ein Fahrradventil,
wenn das zugehörige Fahrrad fährt?

Der betrachtete Punkt muss nicht genau den Radius als Abstand zum Mittelpunkt haben, sondern kann auch außer- oder innerhalb des „Rades“ liegen.

Zykloiden



Schülertext: „Um auf die Parameterdarstellung der Zykloide zu kommen, muss man wissen, um welchen Winkel α sich das Rad dreht, wenn der Mittelpunkt des Rades sich um t nach rechts verschiebt. Bewegt sich der Mittelpunkt um t, so muss sich auch der Umfang $U = 2 \cdot \pi \cdot r$ um t abwickeln.

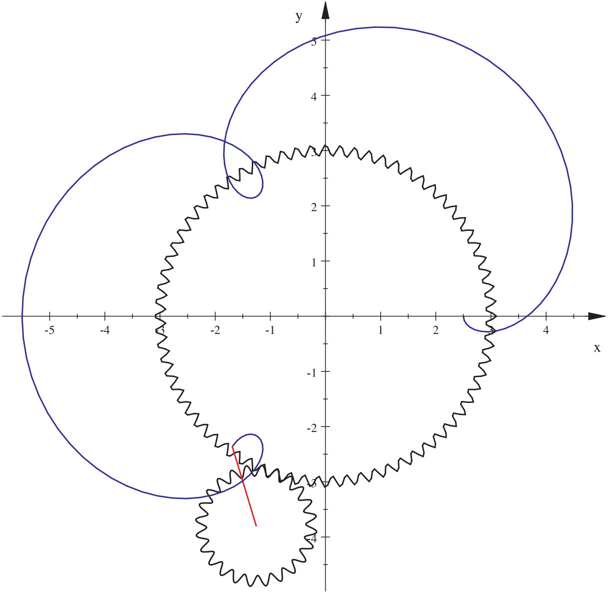
$$t = \frac{\alpha(t)}{2 \cdot \pi} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \;\Leftrightarrow\; \alpha(t) = \frac{t}{r}$$

Die Parameterdarstellung der Zykloide setzt sich aus einer Kreisbewegung und einer linearen Bewegung zusammen. …“

… einige Fallstricke gibt es aber noch:

- Drehrichtung
- Startpunkt

Epizykloide



Hypozykloide