

Kegelschnitte

1 Kegel

In der Mathematik ist es üblich, einen Kreiskegel K als unendliches Gebilde aufzufassen, nämlich als die Menge aller Punkte derjenigen Geraden, die einen Punkt S des Raumes mit den Punkten eines Kreises k verbinden, siehe Abb. 1. Diese Geraden heißen *Mantellinien*, der Punkt S *Spitze* und der Kreis k *Grundkreis* des Kreiskegels K . Die Gerade durch die Spitze S und den Mittelpunkt M des Grundkreises wird als *Achse* des Kreiskegels K bezeichnet. Steht die Achse eines Kreiskegels K senkrecht auf der Grundkreisebene ε , so ist K ein gerader Kreiskegel. Ist α der Winkel zwischen der Kegelachse und den Mantellinien, so heißt 2α *Öffnungswinkel* von K . Kreiskegel bestehen nach dieser Begriffsauffassung aus zwei Kegelästen, es handelt sich also um „Doppelkegel“.

Der Grundkreis eines Kreiskegels ist nicht eindeutig bestimmt. So könnte jeder der in Abb. 2 dargestellten Kreise als Grundkreis ein und desselben Kegels verwendet werden. Hingegen sind jedem geraden Kreiskegel eindeutig eine Achse, eine Spitze und ein Öffnungswinkel zugeordnet, und durch diese wird umgekehrt ein gerader Kreiskegel eindeutig bestimmt.

Es seien a eine Gerade und S ein Punkt von a . Der *gerade Kreiskegel mit der Spitze S , der Achse a und dem Öffnungswinkel 2α* ist die Menge aller Punkte derjenigen Geraden, die durch S verlaufen und mit a den Winkel α einschließen.

Um eine Gleichung für gerade Kreiskegel herzuleiten, betrachten wir einen geraden Kreiskegel, dessen Spitze im Koordinatenursprung liegt und dessen Achse die z -Achse ist (siehe Abb. 2). Dieser Kegel besteht aus den Punkten P von Kreisen, die in zur x - y -Ebene parallelen Ebenen liegen und deren Mittelpunkte jeweils der z -Achse angehören. Jeder dieser Kreise ist durch die z -Koordinate seines Mittelpunktes (welche mit der z -Koordinate jedes Punktes des Kreises übereinstimmt) eindeutig bestimmt. Der Radius eines solchen Kreises hängt mit seiner z -Koordinate zusammen: Da der Winkel bei P in dem in Abb. 2 dargestellten rechtwinkligen Dreieck gleich dem halben Öffnungswinkel α des Kreiskegels ist, gilt

$$\tan \alpha = \frac{r}{|z|},$$

und somit

$$r = |z| \tan \alpha .$$

Da jeder Punkt des Kegels auf einem der beschriebenen Kreise liegt, gilt also für die Koordinaten eines beliebigen Punktes $P(x; y; z)$ des Kreiskegels:

$$x^2 + y^2 = r^2 = z^2 \cdot (\tan \alpha)^2 .$$

Da für α beliebige spitze Winkel in Frage kommen, kann $\tan \alpha$ beliebige positive Werte annehmen.

Jeder gerade Kreiskegel, dessen Spitze im Koordinatenursprung liegt und dessen Achse die z -Achse ist, wird durch eine Gleichung der Form

$$x^2 + y^2 = A^2 z^2 \tag{1}$$

beschrieben. Dabei ist $\arctan A$ der halbe Öffnungswinkel des Kreiskegels.

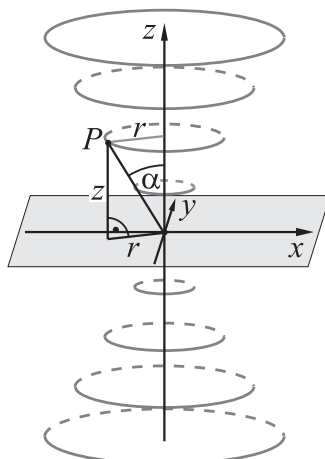
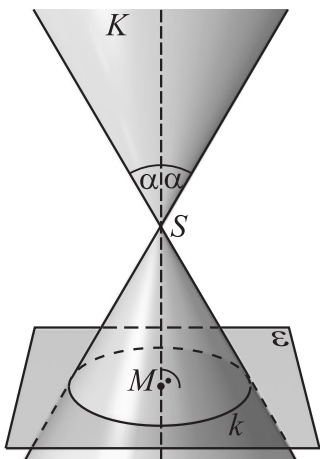


Abbildung 1: Kegel

Abbildung 2: Herleitung einer Kegelformel

Schnittfiguren einer Ebene und eines Kreiskegels

Für einige einfache Fälle können wir nun Gleichungen der Schnittkurven einer Ebene und eines Kreiskegels ermitteln. Wir betrachten dazu den Kegel mit der Gleichung $K: x^2 + y^2 = z^2$ (also mit $A=1$, d. h. $\alpha=45^\circ$) und die durch folgende Gleichungen beschriebenen Ebenen (siehe Abb. 3):

$$\varepsilon_1: z = 1,5$$

$$\varepsilon_2: y = -1$$

$$\varepsilon_3: z = y + 1$$

Durch Einsetzen dieser Gleichungen in die Gleichung von K ergibt sich:

$$x^2 + y^2 = 2,25$$

$$z^2 - x^2 = 1$$

$$x^2 = 2y + 1 \text{ bzw. } y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

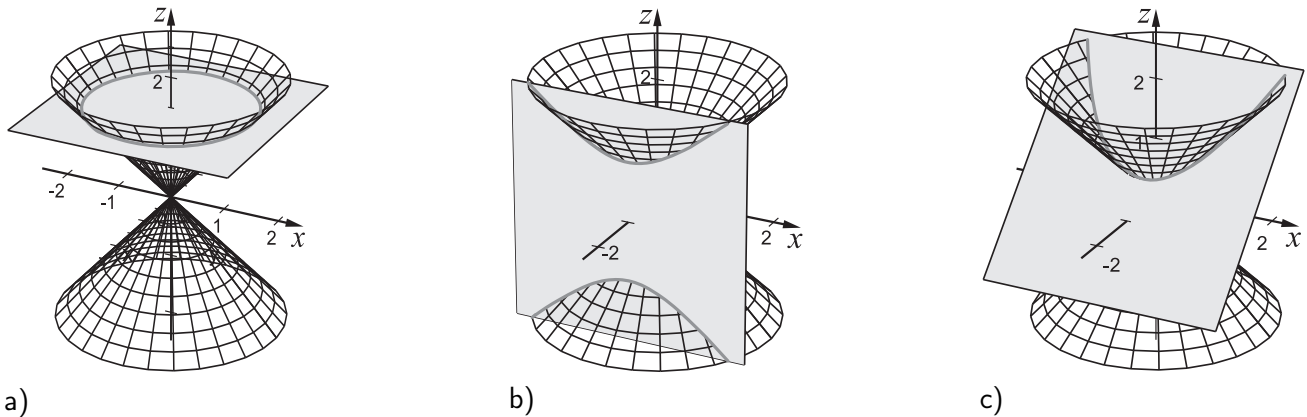


Abbildung 3: Schnittkurven eines Kreiskegels mit ausgewählten Ebenen

Diese Gleichungen beschreiben die Projektionen der Schnittkurven von K mit ε_1 , ε_2 und ε_3 in die x - y - bzw. in die x - z -Ebene. Bei den Schnittkurven handelt es sich um einen Kreis, eine Hyperbel und eine Parabel. Weiterhin können als Schnittkurven eines Kreiskegels und einer Ebene, die nicht durch die Kegelspitze verläuft, auch Ellipsen (die keine Kreise sind) auftreten. Alle diese Kurven werden durch quadratische Gleichungen (in zwei Variablen) beschrieben und heißen daher *Kurven zweiter Ordnung*. Eine genauere Untersuchung derartiger Kurven erfolgt im folgenden Abschnitt. In den Abschnitten 3 und 9 werden wir noch auf zwei völlig unterschiedlichen Wegen zeigen, dass Schnitte von Kegeln mit Ebenen *immer* Ellipsen, Hyperbeln oder Parabeln sowie (wenn die Ebene durch die Kegelspitze verläuft) Punkte, Geraden oder Geradenpaare sind.

Aufgabe

1. Leite je eine Gleichung der Form $z = f(x, y)$ für den oberen und den unteren Ast eines geraden Kreiskegels mit dem Öffnungswinkel 2α her, dessen Spitze im Koordinatenursprung liegt und dessen Achse mit der z -Achse identisch ist (siehe Abb. 2). Drücke dazu für jeden Punkt des Kegels die z -Koordinate in Abhängigkeit von den zugehörigen x - und y -Werten aus.

2 Ortsdefinitionen von Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln

In früheren Jahrhunderten wurde häufig großer Wert auf elliptisch geformte Blumenbeete und Hecken gelegt. Aus dieser Zeit stammt die „Gärtnerkonstruktion“, eine Ellipsenkonstruktion, die der Gärtner mit zwei Pflöcken und einer Schnur ausführt, siehe Abb. 4. Ausgehend von der Gärtnerkonstruktion lassen sich Ellipsen folgendermaßen definieren:¹

Ortsdefinition der Ellipse

Eine Ellipse ist die Menge aller Punkte P der Ebene, für welche die Summe der Abstände zu zwei vorgegebenen Punkten F_1 und F_2 konstant und größer als der Abstand von F_1 und F_2 ist (siehe Abb. 5):

$$|F_1P| + |F_2P| = \text{const}, \quad |F_1P| + |F_2P| > |F_1F_2|.$$

Die Punkte F_1 und F_2 werden als *Brennpunkte* der Ellipse bezeichnet.

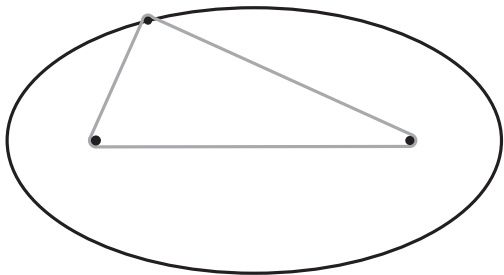


Abbildung 4: Gärtnerkonstruktion der Ellipse

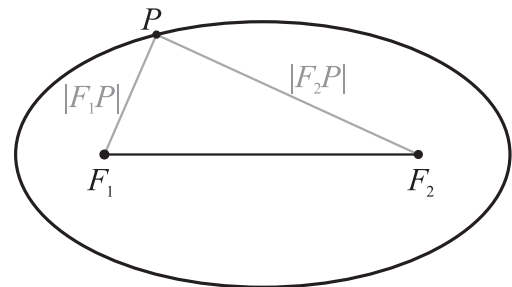


Abbildung 5: Ortsdefinition der Ellipse

Beispiel: Punktweise Konstruktion einer Ellipse (siehe Abb. 6)

Es soll eine Ellipse mit dem Abstand der Brennpunkte $|F_1F_2| = 5$ cm gezeichnet werden, für welche die Abstandssumme $|F_1P| + |F_2P|$ ihrer Punkte P zu den Brennpunkten 7 cm beträgt. Hierfür werden Paare von Kreisen mit den Mittelpunkten F_1 und F_2 konstruiert, für welche die Summe der Radien 7 cm ist. Für jedes derartige Paar von Kreisen werden die Schnittpunkte markiert. Diese Schnittpunkte sind Punkte der zu konstruierenden Ellipse. Nach der Konstruktion genügend vieler Punkte der Ellipse werden diese verbunden. Gut eignet sich für die Durchführung einer derartigen Konstruktion z. B. Geogebra.

Bestimmungstücke und -größen von Ellipsen

Die Hälfte des Abstandes $|F_1F_2|$ zwischen den Brennpunkten einer Ellipse heißt *lineare Exzentrizität* e . Der Mittelpunkt der Strecke F_1F_2 wird *Mittelpunkt* M der Ellipse genannt. Die Gerade, die durch die Brennpunkte einer Ellipse verläuft, heißt *Hauptachse* (mit der Länge $2a$) die dazu senkrechte Achse durch den Mittelpunkt *Nebenachse* (mit der Länge $2b$).

Die beiden Punkte S_1 und S_2 einer Ellipse, die auf der Hauptachse liegen, heißen *Hauptscheitel*. Die Schnittpunkte S_3 und S_4 einer Ellipse mit ihrer Nebenachse heißen *Nebenscheitel* (siehe Abb. 7).

¹Die Bezeichnung „Ortsdefinition“ rührt daher, dass früher statt von Punktmenge von geometrischen Orten gesprochen wurde. Die obige Definition wurde also begonnen mit „Eine Ellipse ist der geometrische Ort aller Punkte ...“.

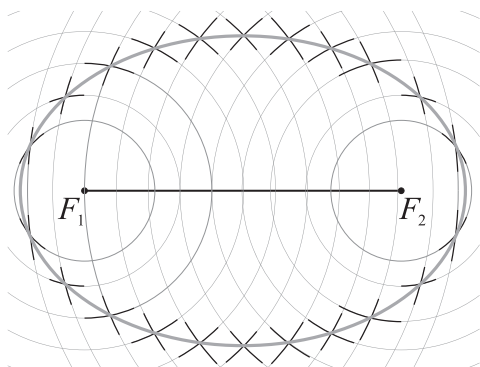


Abbildung 6: Punktweise Konstruktion einer Ellipse

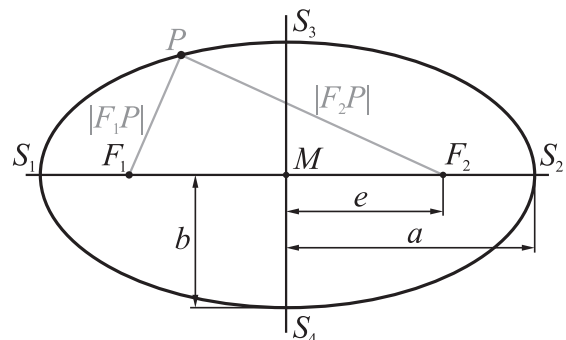


Abbildung 7: Bestimmungstücke und -größen von Ellipsen

Satz

a) Für jeden Punkt P einer Ellipse mit den beiden Brennpunkten F_1 und F_2 sowie der Länge $2a$ der Hauptachse gilt:

$$|F_1P| + |F_2P| = 2a.$$

b) Für jede Ellipse mit der linearen Exzentrizität e , der Hauptachsenlänge $2a$ sowie der Länge $2b$ der Nebenachse gilt:

$$a^2 = b^2 + e^2.$$

Aufgabe

2. Beweise den obigen Satz.

Ortsdefinition der Hyperbel

Eine Hyperbel ist die Menge aller Punkte P der Ebene, für welche der Absolutbetrag der Differenz der Abstände zu zwei vorgegebenen Punkten F_1 und F_2 konstant und positiv ist (siehe Abb. 8):

$$||F_1P| - |F_2P|| = \text{const}, \quad ||F_1P| - |F_2P|| > 0.$$

Die Punkte F_1 und F_2 werden als *Brennpunkte* der Hyperbel bezeichnet.

Konstruktionen von Hyperbeln lassen sich anhand dieser Definition analog zu der oben beschriebenen Ellipsenkonstruktion führen, z. B. mittels GeoGebra.

Wie bei der Ellipse werden die Hälfte des Abstandes $|F_1F_2|$ zwischen den Brennpunkten einer Hyperbel als *lineare Exzentrizität* e und der Mittelpunkt der Strecke $\overline{F_1F_2}$ als *Mittelpunkt* M der Hyperbel bezeichnet. Die Schnittpunkte S_1 und S_2 einer Hyperbel mit ihrer Achse F_1F_2 heißen *Scheitel* der Hyperbel.

Satz: Für jeden Punkt P einer Hyperbel mit den beiden Brennpunkten F_1 und F_2 sowie den Scheitelpunkten S_1 und S_2 gilt:

$$||F_1P| - |F_2P|| = |S_1S_2| = 2a.$$

Aufgaben

3. Warum muss in der Ortsdefinition der Hyperbel $||F_1P| - |F_2P|| > 0$ gefordert werden? Was für eine Figur erhält man für $||F_1P| - |F_2P|| = 0$?

4. Begründe den obigen Satz.

Hinweis: Nutze die Tatsache, dass auch die Scheitelpunkte Punkte der Hyperbel sind und deshalb die nicht näher bestimmte Konstante (const) in der Ortsdefinition der Hyperbel für diese genauso groß sein muss wie für alle anderen Punkte der Hyperbel.

5. Weise nach, dass der Graph der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ ist eine Hyperbel mit den Brennpunkten $F_1(\sqrt{2}; \sqrt{2})$ und $F_2(-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ ist, siehe Abb. 9.

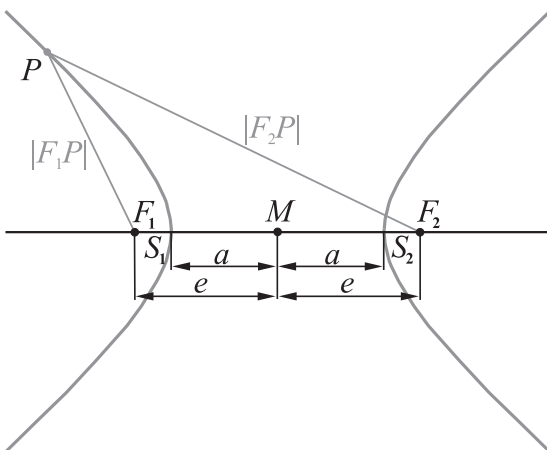


Abbildung 8: Hyperbel

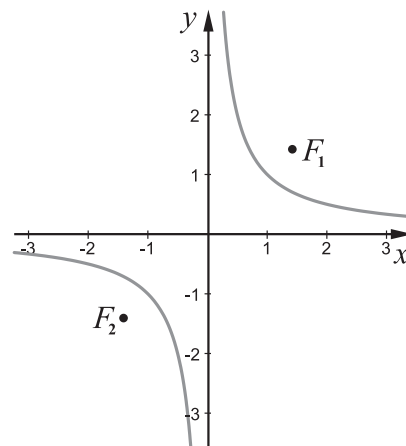


Abbildung 9: Graph der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$

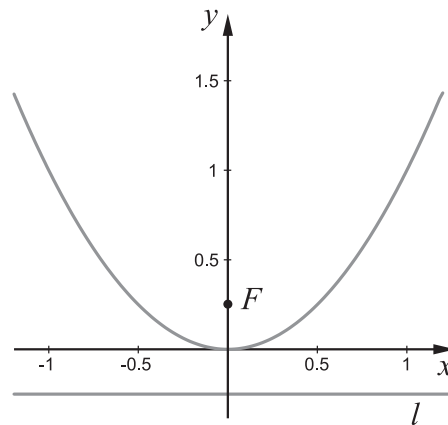
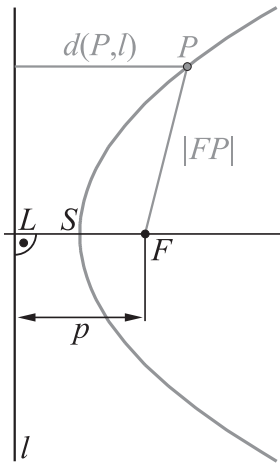


Abbildung 10: Parabel (links)

Abbildung 11: Graph der Funktion f mit $f(x) = x^2$ (rechts)

Ortsdefinition der Parabel

Eine Parabel ist die Menge aller Punkte P der Ebene, für die der Abstand von einem festen Punkt F gleich dem Abstand von einer festen Geraden l ist (siehe Abb. 10):

$$|FP| = d(P, l).$$

Der Punkt F wird als *Brennpunkt*, die Gerade l als *Leitlinie* der Parabel bezeichnet.

Der Abstand p des Brennpunktes von der Leitlinie heißt *Halbparameter*, die Größe $2p$ *Parameter* der Parabel. Die zur Leitlinie l senkrechte Gerade durch den Brennpunkt wird *Achse* und der Schnittpunkt S einer Parabel mit ihrer Achse *Scheitelpunkt* der Parabel genannt.

Beispiel

Der Graph der Funktion $f: f(x) = x^2$ ist eine Parabel mit dem Brennpunkt $F(0; \frac{1}{4})$ und der Leitlinie $l: y = -\frac{1}{4}$, siehe Abb. 11.

Für die Abstände eines beliebigen Punktes $P(x; x^2)$ vom Brennpunkt und von der Leitlinie gilt

$$|FP|^2 = x^2 + (x^2 - \frac{1}{4})^2 = x^2 + x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{16} = x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{16} \quad \text{und}$$

$$(d(P, l))^2 = (x^2 + \frac{1}{4})^2 = x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{16}.$$

Beide Abstände sind also für beliebige Punkte des Funktionsgraphen gleich. Umgekehrt liegen alle Punkte, für die $|FP| = d(P, l)$ gilt, auf dem Graphen der Funktion f mit $f(x) = x^2$. Dieser Funktionsgraph und die Parabel mit dem Brennpunkt $F(0; \frac{1}{4})$ und der Leitlinie $l: y = -\frac{1}{4}$ sind somit identisch.

Aufgaben

6. Weise nach, dass die Länge der Sehne $\overline{P_1P_2}$ einer Parabel, die durch den Brennpunkt F dieser Parabel verläuft und senkrecht auf ihrer Achse steht, gleich dem Parameter $2p$ dieser Parabel ist (siehe dazu Abb. 10).
7. Zeige, dass der Graph der Funktion $f: f(x) = ax^2$ eine Parabel mit dem Brennpunkt $F(0; \frac{1}{4a})$ und der Leitlinie $l: y = -\frac{1}{4a}$ ist.
8. Es seien S der Scheitelpunkt und L der Schnittpunkt von Achse und Leitlinie einer Parabel (Abb. 10). Weise nach, dass dann gilt: $|LS| = |SF| = \frac{p}{2}$.

3 Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln als Kegelschnitte – Dandelin’sche Kugeln

Wie schon gesagt bezeichnet man als „Kegelschnitte“ Punktmen- gen, die beim Schnitt einer Ebene E mit einem mathematischen Kegel, also einem unendlichen Doppelkegel, entstehen. Abb. 12 zeigt die Situation in einer Ebene, welche die Achse a und damit die Kegelspitze S enthält und senkrecht zu E ist. β sei der Winkel zwischen der Ebene E und der Kegelachse, o. B. d. A. gilt $0 \leq \beta \leq 90^\circ$.

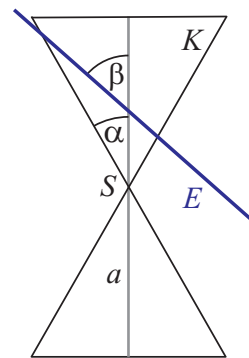


Abbildung 12: Schnitt einer Ebene E und eines Kegels K

Abb. 13 zeigt die verschiedenen Typen von Kegelschnitten. Wir be- ginnen wie in Abb. 12 mit einer Ebene, die nicht durch S verläuft. In Abb. 13 a) ist $\beta = 90^\circ$, und der Kegelschnitt ist ein Kreis. Nun drehen wir die Ebene um ihren Schnittpunkt mit der Achse. Wird β kleiner, ist aber noch größer als α , so entsteht eine geschlossene Kurve, die wie eine Ellipse aussieht (b). Im Spezialfall c) $\beta = \alpha$ schneidet die Ebene weiterhin nur einen Teil des Kegels, wird aber unendlich; der Kegelschnitt sieht aus wie eine Parabel.

Für $0 < \beta < \alpha$ (Abb. 13 d) schneidet die Ebene beide Teile des Kegels, der Kegelschnitt sieht wie eine Hyperbel aus. Damit sind alle möglichen Fälle betrachtet, in denen die Ebene nicht durch die Kegelspitze verläuft.

Verläuft die Ebene durch die Spitze S des Kegels, so treten weitere Schnittfiguren auf. Enthält die Ebene sogar die gesamte Kegelachse (was für $\beta = 0^\circ$ der Fall ist), so besteht der Kegelschnitt aus zwei Mantellinien des Kegels, die einen Schnittwinkel von 2α haben (Abb. 13 e). Für $\alpha < \beta \leq 90^\circ$ besteht der Kegelschnitt nur aus der Spitze S (f). Für $0^\circ \leq \beta \leq \alpha$ schließlich besteht der Kegelschnitt aus zwei sich in S schneidenden Mantellinien, wobei im „Randfall“ $\beta = \alpha$ beide Geraden zu einer „Doppelgeraden“ zusammenfallen (g).

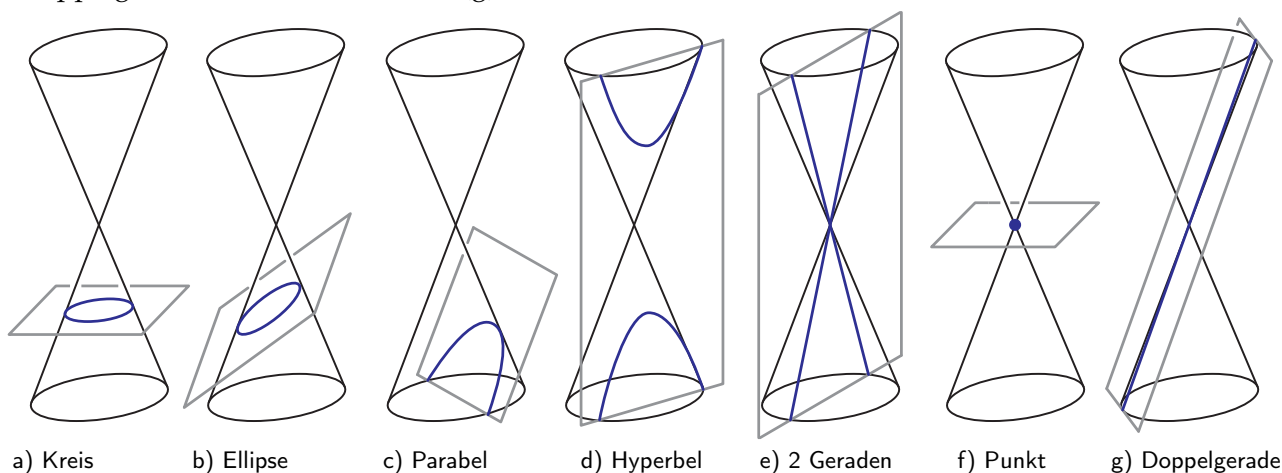


Abbildung 13: Kegelschnitte

Dandelin’sche Kugeln

Dass es sich bei den interessanten Kegelschnitten tatsächlich um Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln handelt, müssen wir erst noch beweisen. Die Methode der Dandelin’schen Kugeln geht auf Ger- minal Pierre Dandelin (1794–1847) zurück, einen belgischen Mathematiker, der sich insbesondere mit Kegelschnitten beschäftigte. Die Dandelin’schen Kugeln sind eine bzw. zwei Kugeln, die die Mantellinien eines Kegels und eine Schnittebene berühren.

Wir betrachten zuerst den „Ellipsenfall“, siehe Abb. 14 a) Gegeben sind ein Kegel und eine Ebene, die den ellipsenförmigen Kegelschnitt erzeugt. Wir betrachten die untere Hälfte des Kegels, die von der Ebene in einen endlichen und einen unendlichen Körper zerlegt wird. Oberhalb und unterhalb der Schnittebene E werden Kugeln so in den Kegel eingefügt, dass sie die Ebene E in den Punkten F_1 bzw. F_2 und den Kegel in den eingezeichneten Berührungskreisen k_1 bzw. k_2 berühren. Diese beiden Punkte werden sich als Ellipsenbrennpunkte für den Kegelschnitt erweisen.

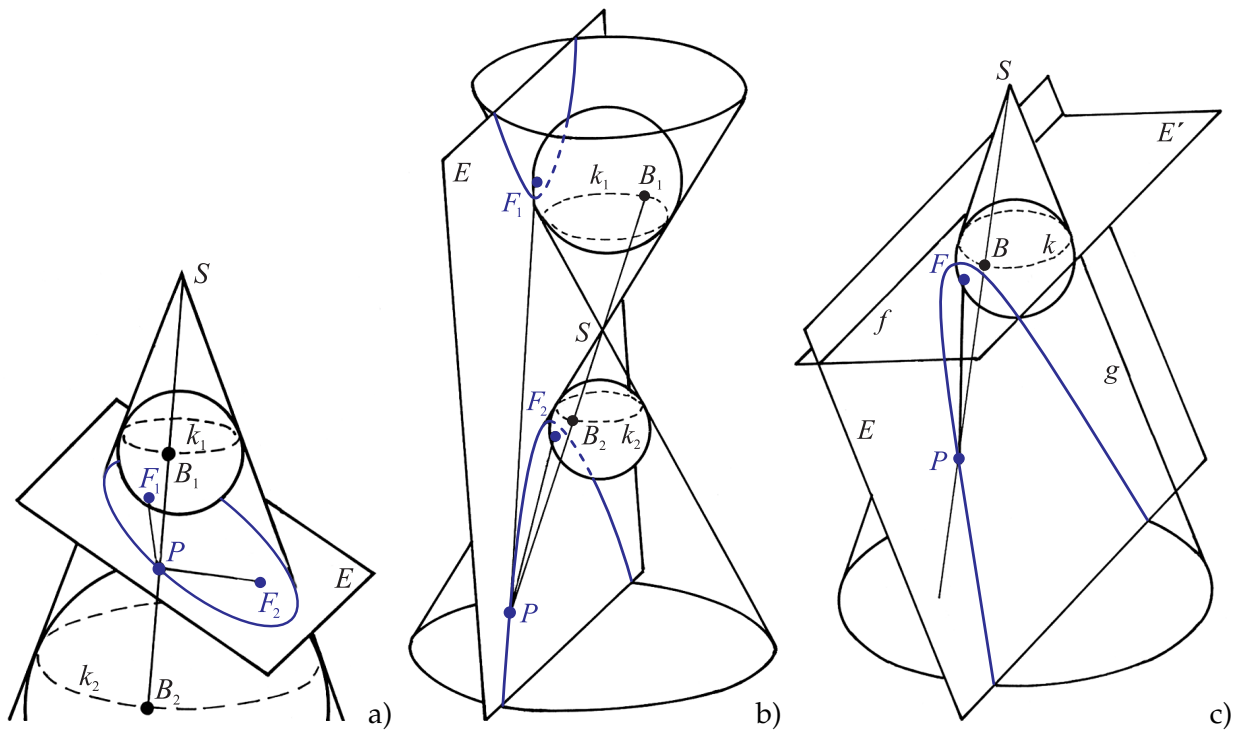


Abbildung 14: Dandelin'sche Kugeln für a) Ellipsen, b) Hyperbeln, c) Parabeln

Für einen beliebigen Punkt P unseres Kegelschnitts (den wir als Ellipse nachweisen wollen) betrachten wir die Mantellinie SP . Sie möge die beiden Berührkreise in den Punkten B_1 bzw. B_2 schneiden. Dann gilt $|PF_1| = |PB_1|$ und $|PF_2| = |PB_2|$, da die zugehörigen Geraden Tangenten an k_1 bzw. k_2 sind. Damit erhalten wir

$$|F_1P| + |PF_2| = |B_1P| + |PB_2| = |B_1B_2| = \text{konstant},$$

also ist der fragliche Kegelschnitt tatsächlich eine Ellipse (in der geometrischen Definition als Ortslinie). Im Spezialfall, dass die Schnittfigur ein Kreis ist, fallen die beiden Berührungspunkte F_1 und F_2 zusammen, und die Dandelin'schen Kugeln führen zur „normalen“ Definition des Kreises.

Die Analyse der vermuteten Hyperbel verläuft analog zur Ellipse. Die beiden Dandelin'schen Kugeln werden in beide Halbkegel so gelegt, dass sie die Ebene in den Punkten F_1 bzw. F_2 und den Mantel des Kegels in den Kreisen k_1 bzw. k_2 berühren (siehe Abb. 14 b). Wie bei der Ellipse betrachten wir einen beliebigen Punkt P des als Hyperbel vermuteten Kegelschnitts und die Mantellinie SP , welche die beiden Berührkreise in den Punkten B_1 bzw. B_2 schneiden möge. Jetzt kann man die Ortseigenschaft

$$|PF_1| - |PF_2| = |B_1B_2| = \text{konstant}$$

(ähnlich wie die entsprechende Eigenschaft der Ellipse) begründen (man beachte dazu, dass $|PB_1| = |PB_2| + |B_1B_2|$ ist. Der Kegelschnitt genügt somit der Definition der Hyperbel als Ortslinie.

Der Fall der Parabel ist in Abb. 14 c) dargestellt. Jetzt ist die Schnittebene E parallel zu einer Mantellinie g des Kegels mit Spitze S . Die Dandelin'sche Kugel berührt die Ebene E im Punkt F und den Kegel in einem Kreis k , der die Ebene E' festlegt. Die Ebenen E und E' schneiden sich in der Geraden f . Es lässt sich begründen, dass die Gerade f als Leitlinie und der Punkt F als Brennpunkt die geometrische Definition der Parabel für den fraglichen Kegelschnitt erfüllen.

4 Gleichungen von Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln

Die Gleichung der Ellipse in Hauptachsenlage

Um möglichst einfach eine Gleichung für eine Ellipse herleiten zu können, sollte ihre Hauptachse mit der x -Achse und die Nebenachse mit der y -Achse übereinstimmen (eine solche Lage heißt *Hauptachsenlage*, siehe Abb. 15). Durch eine geeignete Wahl des Koordinatensystems lässt sich dies für jede Ellipse erreichen.

Ist P ein von den beiden Hauptscheiteln verschiedener Punkt der Ellipse und P' der Fußpunkt des Lotes von P auf die x -Achse, so sind $\triangle F_1PP'$ und $\triangle F_2PP'$ rechtwinklige Dreiecke. Dabei ist $|PP'| = y$ sowie

$$|F_1P'| = |e + x| \quad \text{und} \quad |F_2P'| = |e - x|.$$

Nach dem Satz des Pythagoras gilt:

$$|F_1P| = \sqrt{y^2 + (e + x)^2} \quad \text{und} \quad |F_2P| = \sqrt{y^2 + (e - x)^2}.$$

Daraus ergibt sich:

$$|F_1P| + |F_2P| = \sqrt{y^2 + (e + x)^2} + \sqrt{y^2 + (e - x)^2}.$$

Wegen $|F_1P| + |F_2P| = 2a$ folgt daraus:

$$\sqrt{y^2 + (e + x)^2} + \sqrt{y^2 + (e - x)^2} = 2a.$$

Diese Gleichung wird nun vereinfacht. Zunächst wird auf beiden Seiten $\sqrt{y^2 + (e - x)^2}$ subtrahiert, und es werden beide Seiten der entstehenden Gleichung quadriert:

$$\begin{aligned} \sqrt{y^2 + (e + x)^2} &= 2a - \sqrt{y^2 + (e - x)^2} \\ y^2 + (e + x)^2 &= 4a^2 + y^2 + (e - x)^2 - 4a\sqrt{y^2 + (e - x)^2}. \end{aligned}$$

Durch Auflösen der Klammern und Vereinfachen ergibt sich daraus

$$a\sqrt{y^2 + (e - x)^2} = a^2 - ex,$$

erneutes Quadrieren beider Seiten führt zu

$$a^2 [y^2 + (e - x)^2] = a^4 + e^2x^2 - 2a^2ex$$

bzw.

$$(a^2 - e^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2).$$

Nach Ersetzen von $a^2 - e^2$ durch b^2 (siehe Satz auf S. 4) folgt daraus

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Division dieser Gleichung durch a^2b^2 auf beiden Seiten ergibt schließlich:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Bislang wurde gezeigt, dass alle Punkte der gegebenen Ellipse die Gleichung (*) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ erfüllen. Um nachzuweisen, dass diese Gleichung tatsächlich eine Gleichung der Ellipse ist, muss noch gezeigt werden, dass *nur* Punkte der Ellipse die Gleichung erfüllen bzw. dass alle Punkte, deren Koordinaten die Gleichung (*) erfüllen, der Ellipse angehören. Dazu berechnen wir zunächst die Abstände eines beliebigen Punktes $Q(x; y)$ zu den Brennpunkten F_1 und F_2 :

$$(**) \quad |QF_1| = \sqrt{(x + e)^2 + y^2}, \quad |QF_2| = \sqrt{(x - e)^2 + y^2}.$$

Ist Q ein Punkt, der die Gleichung (*) erfüllt, so gilt $y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$. Wegen $b^2 = a^2 - e^2$ ergibt sich daraus:

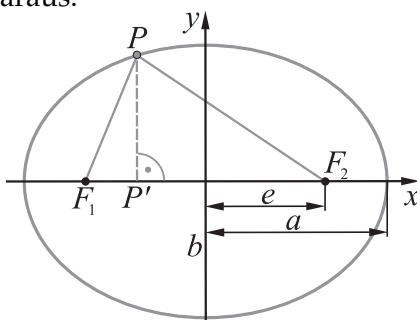


Abbildung 15: Herleitung der Ellipsengleichung in Hauptachsenlage

$$y^2 = a^2 - e^2 - x^2 + \frac{e^2}{a^2} x^2.$$

Für (***) kann deshalb geschrieben werden:

$$|QF_1| = \sqrt{2ex + a^2 + \frac{e^2}{a^2} x^2}, \quad |QF_2| = \sqrt{-2ex + a^2 + \frac{e^2}{a^2} x^2}$$

beziehungsweise

$$(***) \quad |QF_1| = \pm \left(a + \frac{e}{a} x\right), \quad |QF_2| = \pm \left(a - \frac{e}{a} x\right).$$

Da in diesen beiden Gleichungen auf den linken Seiten Abstände, also positive Zahlen, stehen, müssen auf den rechten Seiten die Vorzeichen so gewählt werden, dass sich ebenfalls positive Werte ergeben. Da der Punkt $Q(x; y)$ der Gleichung (*) genügen soll, muss $\frac{x^2}{a^2} \leq 1$ und somit $|x| \leq a$ sein. Wegen $a^2 = e^2 + b^2$ muss weiterhin $e < a$ sein. Somit sind in (***) die beiden Ausdrücke in den Klammern positiv, und es ergibt sich daraus

$$|QF_1| + |QF_2| = a + \frac{e}{a} x + a - \frac{e}{a} x = 2a.$$

Der Punkt Q erfüllt daher die Ortsdefinition (siehe S. 3) und ist ein Punkt der betrachteten Ellipse. Damit ist nachgewiesen, dass die Gleichung (*) alle Punkte der Ellipse und nur diese beschreibt.

Mittelpunktsgleichung der Ellipse

Eine Ellipse, deren Mittelpunkt der Koordinatenursprung ist, deren Hauptachse auf der x -Achse und deren Nebenachse auf der y -Achse liegt, hat die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2)$$

Dabei ist a die halbe Länge der Haupt-, b die halbe Länge der Nebenachse.

Kreise sind spezielle Ellipsen. Falls die Brennpunkte einer Ellipse identisch sind, also $e = |F_1 F_2| = 0$ gilt, so folgt daraus nach Satz 2 $a = b$. Die Gleichung (2) nimmt damit die Gestalt $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ bzw. $x^2 + y^2 = a^2$ an und entspricht der Kreisgleichung in Mittelpunktslage mit dem Radius $r = a$.

Beispiel

Aufstellen einer Gleichung der Ellipse mit den Brennpunkten $F_1(-4; 0)$ und $F_2(4; 0)$ sowie dem Ellipsenpunkt $P(4; 6)$.

Die Länge der Hauptachse der Ellipse erhält man durch

$$2a = |F_1 P| + |F_2 P| = \sqrt{8^2 + 6^2} + 6 = 16.$$

Für die lineare Exzentrizität gilt $2e = |F_1 F_2| = 8$, also $e = 4$. Die Länge der Nebenachse ist nach Teil b) des Satzes auf S. 4:

$$b = \sqrt{a^2 - e^2} = \sqrt{48}.$$

Somit ergibt sich wegen $a = 8$ und $b = \sqrt{48}$ die folgende Gleichung der Ellipse:

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1 \quad \text{bzw.} \quad 3x^2 + 4y^2 = 192.$$

Graphische Darstellung von Ellipsen mithilfe von GeoGebra

Ellipsen, die durch Gleichungen gegeben sind, lassen sich in GeoGebra am einfachsten mittels des Befehls `ImpliziteKurve` darstellen. Um z. B. die Ellipse mit der Gleichung $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ darzustellen, gibt man ein:

`ImpliziteKurve(x^2/4 + y^2/9 - 1)`

Aufgaben

9. Stelle für die Ellipsen mit den folgenden Stücken Gleichungen auf:

a) $2e = 8, 2a = 10$

c) $2a = 20, F_1(-8; 0), F_2(8; 0)$

b) $b = 2, 2e = 6$

d) $F_1(-2; 0), F_2(2; 0), P(2; 3)$ (P liegt auf der Ellipse)

10. Berechne für die Ellipse mit der Gleichung $16x^2 + 25y^2 = 1600$ die Längen der Achsen, die lineare Exzentrizität und die Brennpunktkoordinaten.

11. Beweise, dass für Punkte innerhalb bzw. außerhalb einer Ellipse die Ungleichungen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$ bzw. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1$ gelten.

Hinweis: Beachten Sie, dass ein Punkt P innerhalb (außerhalb) der Ellipse liegt, falls ein Ellipsenpunkt P_0 existiert, der mit P auf einer Geraden durch den Mittelpunkt M der Ellipse liegt und von M einen größeren (kleineren) Abstand als P hat.

12. a) Konstruiere die Ellipse mit der Gleichung $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$.
 b) Verschiebe die Ellipse um 3 Einheiten in x -Richtung und um 2 Einheiten in y -Richtung. Wie lautet die Gleichung der verschobenen Ellipse?

Die Gleichung der Hyperbel in Hauptachsenlage

Auf analoge Weise wie für Ellipsen lässt sich eine Gleichung für Hyperbeln in Hauptachsenlage herleiten.

Aufgabe

13. Leite die Mittelpunktsgleichung (3) der Hyperbel her. Nutzen Sie dazu Abb. 16 und orientieren Sie sich an der Herleitung der Ellipsengleichung.

Mittelpunktsgleichung der Hyperbel

Eine Hyperbel, deren Mittelpunkt der Koordinatenursprung ist und deren Brennpunkte auf der x -Achse liegen, hat die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (3)$$

Dabei ist a die Hälfte des Abstandes zwischen den beiden Scheiteln, und es ist $b = \sqrt{e^2 - a^2}$ mit der linearen Exzentrizität e , siehe Abb. 16.

Beispiel

In der Aufgabe 6 wurde festgestellt, dass der Graph der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ eine Hyperbel ist. Durch eine *Koordinatentransformation* wird diese Hyperbel nun in ein Koordinatensystem überführt, bezüglich dessen sie sich in Hauptachsenlage befindet, und eine Gleichung der Hyperbel ermittelt.

Ein Koordinatensystem (mit den Achsen x' und y'), bezüglich dessen sich die Hyperbel in Hauptachsenlage befindet, geht aus dem ursprünglichen Koordinatensystem durch eine Drehung um 45° hervor, siehe Abb. 17. Die „alten“ können durch die „neuen“ Koordinaten folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{2} x' - \frac{1}{2}\sqrt{2} y', \quad y = \frac{1}{2}\sqrt{2} x' + \frac{1}{2}\sqrt{2} y'.$$

Durch Ersetzen von x und y durch x' und y' in der Gleichung $y = \frac{1}{x}$ mittels der obigen Transformationsgleichungen ergibt sich die Gleichung

$$\frac{1}{2}\sqrt{2} x' + \frac{1}{2}\sqrt{2} y' = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{2} x' - \frac{1}{2}\sqrt{2} y'}$$

die sich leicht in die Form

$$\frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = 1$$

bringen lässt. Für die lineare Exzentrizität erhält man $e = \sqrt{a^2 + b^2} = 2$.

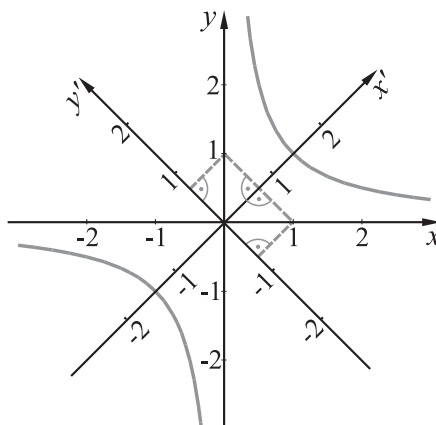
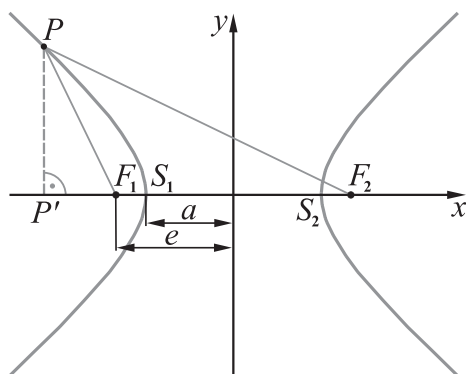


Abbildung 16:
Herleitung der
Hyperbelgleichung

Abbildung 17:
Überführung einer
Hyperbel in
Hauptachsenlage

Aufgaben

14. Von einer Hyperbel in Hauptachsenlage sind zwei Punkte P_1 und P_2 gegeben. Stelle die Mittelpunktsleichung der Hyperbel auf.
- a) $P_1(5; \frac{9}{4}), P_2(2\sqrt{6}; \frac{3}{2}\sqrt{2})$ b) $P_1(3;2), P_2(4;3)$
15. Gegeben ist die Ellipse mit der Gleichung $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{5} = 1$. Stelle eine Mittelpunktsleichung der Hyperbel auf, deren Scheitel sich in den Brennpunkten und deren Brennpunkte sich in den Scheiteln der gegebenen Ellipse befinden.
16. Gesucht ist die Seitenlänge eines Quadrates, dessen Eckpunkte auf der Hyperbel mit der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ liegen. Für welche Hyperbeln lässt sich ein solches Quadrat finden?

Die Scheitelpunktgleichung der Parabel

Um eine Parabelgleichung herzuleiten, ist – wie bereits bei der Ellipse und der Hyperbel – ein geeignetes Koordinatensystem zu wählen. Dazu legt man die x -Achse auf die Achse der Parabel und den Koordinatenursprung auf ihren Scheitelpunkt. Die y -Achse verläuft dann parallel zur Leitlinie, siehe Abb. 18.

Für einen beliebigen Punkt $P(x;y)$ ist

$$|PF|^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2$$

und

$$d(P, l) = x + \frac{p}{2}$$

(siehe Abb. 18). Falls P ein Punkt der Parabel ist, so folgt aus der Ortsdefinition $|PF|^2 = (d(P, l))^2$; durch Einsetzen ergibt sich daraus

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2.$$

Diese Gleichung lässt sich leicht in die Form $y^2 = 2px$ bringen.

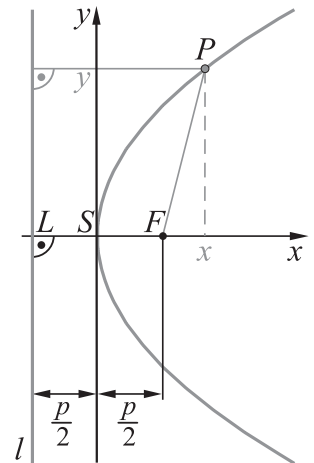


Abbildung 18: Herleitung einer Parabelgleichung

Scheitelpunktgleichung der Parabel

Eine Parabel, deren Scheitelpunkt der Koordinatenursprung ist, und deren Leitlinie parallel zur y -Achse verläuft, hat die Gleichung

$$y^2 = 2px. \quad (4)$$

Dabei ist p der Halbparameter der Parabel (Abstand des Brennpunktes von der Leitlinie, siehe Abb. 18).

Aufgaben

17. Stelle die Scheitelgleichung der Parabel auf, deren Scheitel im Koordinatenursprung liegt, deren Leitlinie parallel zur y -Achse ist und für die folgende zusätzliche Angabe vorhanden ist:
- a) $F(2;0)$ b) $l: x = -3$ c) $F(-1;0)$
18. Wie viele Parabeln mit dem Halbparameter $p = 0,5$ gibt es, deren Scheitel im Ursprung liegen und deren Leitlinien parallel zur y -Achse verlaufen? Gib die Gleichungen dieser Parabeln an.
19. Gib die Koordinaten der Brennpunkte und Gleichungen der Leitlinien für die durch folgende Gleichungen gegebenen Parabeln an.
- a) $y^2 = 20x$ b) $y^2 = -x$ c) $y = x^2$
20. Wie groß ist der Halbparameter der Parabel mit der Gleichung $y^2 = 2px$, wenn diese durch den Punkt $P(5;6)$ verläuft?

Gleichungen von Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln in achsenparalleler Lage

Um eine Gleichung einer Ellipse mit dem Mittelpunkt $M(x_M; y_M)$ bezüglich eines Koordinatensystems KS herzuleiten, dessen x -Achse parallel zur Haupt- und dessen y -Achse parallel zur Nebenachse der Ellipse ist, betrachten wir ein Hilfskoordinatensystem KS', dessen Achsen parallel zu denen von KS sind und dessen Ursprung der Mittelpunkt der Ellipse ist, siehe Abb. 19. In diesem Hilfskoordinatensystem hat die betrachtete Ellipse die Mittelpunktsgleichung

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

Zwischen den Koordinaten eines beliebigen Punktes P bezüglich des Koordinatensystems KS und denen bezüglich KS' bestehen die Beziehungen

$$x = x' + x_M, \quad y = y' + y_M \quad \text{bzw.} \quad x' = x - x_M, \quad y' = y - y_M.$$

Durch Einsetzen in die darüber stehende Ellipsengleichung ergibt sich die *Gleichung der Ellipse in achsenparalleler Lage*:

$$\frac{(x-x_M)^2}{a^2} + \frac{(y-y_M)^2}{b^2} = 1.$$

Analog lassen sich Gleichungen für Hyperbeln und Parabeln in achsenparalleler Lage herleiten:

$$\text{Hyperbel: } \frac{(x-x_M)^2}{a^2} - \frac{(y-y_M)^2}{b^2} = 1, \quad \text{Parabel: } (y-y_M)^2 = 2p(x-x_M).$$

Aufgabe

21. Berechne die Koordinaten des Mittelpunktes und die Längen a und b der Halbachsen der Hyperbel H . Bringen Sie dazu die Gleichungen mittels quadratischer Ergänzung in die Form der Hyperbelgleichung in achsenparalleler Lage.

a) $H : x^2 + 4x - 4y^2 - 24y = 36$ b) $H : 2x^2 - 2x - y^2 + y = 0$

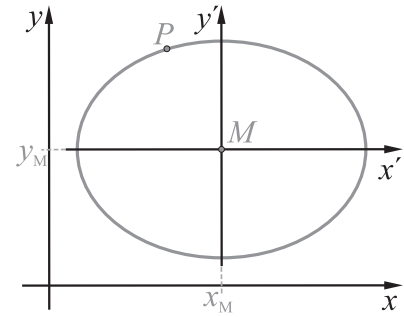


Abbildung 19: Ellipse in achsenparalleler Lage

5 Tangenten an Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln

Für die Herleitung einer Tangentengleichung für Ellipsen betrachten wir Halbellipsen als Funktionsgraphen. Die Ableitung der Funktionsgleichung der „oberen“ Halbellipse

$$f_1(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

ist nach der Kettenregel

$$f_1'(x_0) = b \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} \cdot \left(-\frac{2}{a^2}x\right) = \frac{-b^2x}{a^2b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} = -\frac{b^2x}{a^2y}$$

Somit ist der Anstieg der Tangente in einem beliebigen Punkt P_0 der oberen Halbellipse (mit Ausnahme der beiden Hauptscheitel):

$$m = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$$

Damit lässt sich für die Tangente in P_0 die folgende Gleichung aufstellen:

$$t: y = t(x) = mx + n = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}x + n$$

Durch Einsetzen von x_0 für x und von y_0 für y lässt sich n bestimmen:

$$n = y_0 + \frac{b^2x_0^2}{a^2y_0}$$

Einsetzen dieses Ausdrucks für n in die Gleichung von t führt zu:

$$t: y = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}x + y_0 + \frac{b^2x_0^2}{a^2y_0}$$

Durch Multiplikation dieser Gleichung mit y_0 , Division durch b^2 und Anwendung der Ellipsengleichung ergibt sich:

$$t: \frac{yy_0}{b^2} + \frac{xx_0}{a^2} = \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{x_0^2}{a^2} = 1$$

Es lässt sich zeigen, dass dieselbe Tangentengleichung für Punkte der unteren Halbellipse gilt. Auf analogem Wege lässt sich eine Tangentengleichung für Hyperbeln in Hauptachsenlage herleiten.

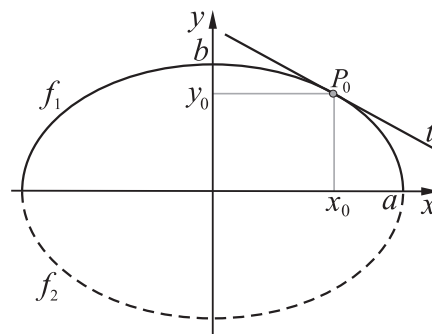


Abbildung 20: Tangente an eine Ellipse

Tangentengleichungen für Ellipsen und Hyperbeln in Hauptachsenlage

Die Tangente an eine Ellipse mit der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ in einem Punkt $P_0(x_0; y_0)$ hat die Gleichung

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

Die Tangente an eine Hyperbel mit der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ in einem Punkt $P_0(x_0; y_0)$ hat die Gleichung

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

Um eine Gleichung für Tangenten an Parabeln herzuleiten, kann die Parabelgleichung (4) $y^2 = 2px$ nach x umgestellt und dann nach y abgeleitet werden:

$$x = f(y) = \frac{1}{2p}y^2, \quad f'(y) = \frac{1}{p}y$$

Die Ableitung in einem Punkt $P_0(x_0; y_0)$ gibt in diesem Falle den Anstieg der Tangente in diesem Punkt bezüglich vertauschter Koordinatenachsen an, also

$$f'(y_0) = \frac{x - x_0}{y - y_0}$$

für beliebige Punkte $P(x; y)$ der Tangente. Der Anstieg der Tangente ist reziprok zu diesem Wert (und somit gleich der Ableitung der Umkehrfunktion von f):

$$m = \frac{1}{f'(y_0)} = \frac{p}{y_0}.$$

Durch Einsetzen in die Normalform der Geradengleichung ergibt sich

$$t: y = mx + n = \frac{p}{y_0}x + n,$$

und durch Einsetzen von x_0 für x und von y_0 für y lässt sich n bestimmen:

$$n = y_0 - \frac{p}{y_0}x_0.$$

Die Tangentengleichung erhält damit die Form

$$t: y = \frac{p}{y_0}x + y_0 - \frac{p}{y_0}x_0 \quad \text{bzw.} \quad t: yy_0 = px + y_0^2 - px_0,$$

Durch Einsetzen von $2px_0$ für y_0^2 ergibt sich daraus $t: yy_0 = p(x + x_0)$.

Tangentengleichungen für Parabeln in Scheitelpunktslage

Die Tangente an eine Parabel mit der Gleichung $y^2 = 2px$ in einem Punkt $P_0(x_0; y_0)$ hat die Gleichung

$$yy_0 = p(x + x_0).$$

Aufgaben

22. Stelle Gleichungen für die beiden Tangenten an die Ellipse E an der Stelle x_0 auf. Berechne dazu zunächst die y -Koordinaten der beiden Punkte $P_{01}(x_0; y_{01})$ und $P_{02}(x_0; y_{02})$ der Ellipse, welche die x -Koordinate x_0 haben. Stelle die Ellipsen und ihre Tangenten graphisch dar.

a) $E: \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1, x_0 = -6$ b) $E: \frac{x^2}{400} + \frac{y^2}{225} = 1, x_0 = 16$

23. Stelle eine Gleichung für die Tangente an die Hyperbel H im Punkt P_0 auf und vereinfache diese so weit wie möglich.

a) $H: \frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{16} = 1; P_0(10; -3)$ b) $H: \frac{(x-4)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1; P_0(9; -\frac{1}{4})$

24. Stelle eine Gleichung der Tangente t an die Parabel $y^2 = 2x$ auf, die

a) parallel zu der Geraden $g: 2x - y = -5$ verläuft;

b) senkrecht auf der Geraden $g: x + y = 7$ steht.

6 Die Asymptoten der Hyperbel

Unter einer Asymptote eines Funktionsgraphen versteht man eine Gerade, der sich der Graph der Funktion $x \rightarrow \infty$ bzw. $x \rightarrow -\infty$ (oder an einer Unstetigkeitsstelle der betrachteten Funktion) beliebig weit annähert. Um Hyperbeln auf mögliche Asymptoten hin zu untersuchen, stellen wir die Hyperbelgleichung (3) nach y um und erhalten $y = \pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$. Somit wird eine Hyperbel in Hauptachsenlage durch die Graphen der beiden Funktionen f_1 und f_2 mit

$$f_1(x) = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \quad \text{und} \quad f_2(x) = -b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$$

dargestellt.

Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}} = \pm \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b}{a}x.$$

Jede Hyperbel besitzt zwei Asymptoten. Diese werden durch die Gleichungen

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{und} \quad y = -\frac{b}{a}x$$

beschrieben, falls $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ die Gleichung der gegebenen Hyperbel ist.

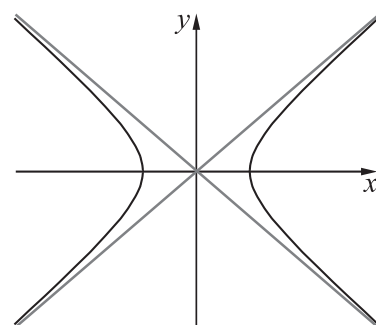


Abbildung 21: Asymptoten einer Hyperbel

7 Die Brennpunkteigenschaften der Kegelschnitte

Brennpunkteigenschaft der Parabel

Strahlen, die parallel zur Symmetrieachse einer Parabel verlaufen, werden so an ihr reflektiert, dass sie durch den Brennpunkt verlaufen (Abb. 22 a).

Angewandt wird diese Eigenschaft z. B. bei der Satellitenantenne (Abb. 22 b). Die vom Satelliten gesendeten, (praktisch) parallelen Strahlen werden an der Antenne so reflektiert, dass alle Strahlen durch den Brennpunkt verlaufen; in diesem ist der Empfänger montiert. Da der Lichtweg umkehrbar ist, funktioniert das auch andersherum, was beim Autoscheinwerfer realisiert ist: Der Glühfaden der Lampe (bzw. ein moderneres Leuchtmittel) befindet sich im Brennpunkt des Scheinwerfers, so dass in Fahrtrichtung ein paralleles Lichtbündel ausgestrahlt wird (Abb. 22 c).

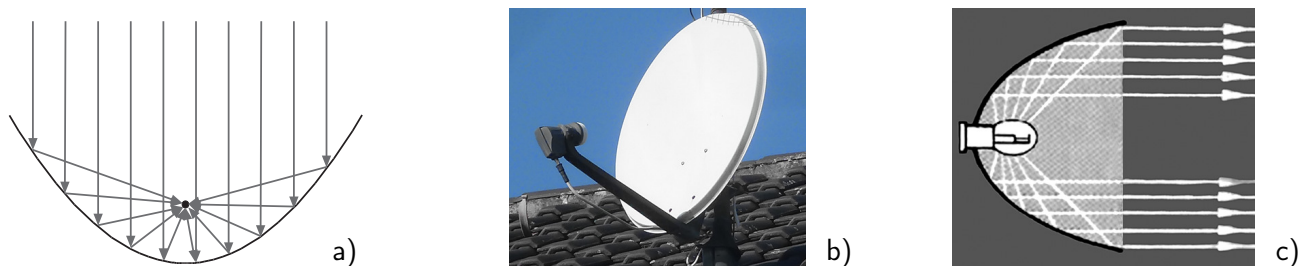


Abbildung 22: Brennpunkteigenschaft der Parabel und zwei Anwendungen

Für den Beweis der Brennpunkteigenschaft der Parabel nutzen wir eine geometrische Eigenschaft von Tangenten an Parabeln. Wir betrachten hierzu wie in Abb. 11 eine Parabel mit einem Brennpunkt F und einer Leitgeraden g , benötigen aber das dort eingeführte Koordinatensystem nicht, da wir lediglich mithilfe der Ortsdefinition der Parabel arbeiten. Wir zeigen, dass die Mittelsenkrechte t der Strecke \overline{FL} (wobei L der Fußpunkt des Lotes von einem Parabelpunkt P_0 auf die Leitlinie ist, siehe Abb. 23) mit der Parabel nur den Punkt P_0 gemeinsam hat, also Tangente an die Parabel in P_0 ist.

Damit ein beliebiger Punkt $Q \in t$ ebenfalls ein Punkt der Parabel wäre, müsste $|FQ| = d(Q, l)$ sein; wir zeigen, dass aber für alle von P_0 verschiedenen Punkte $Q \in t$ gilt $|FQ| > d(Q, l)$:

Da t Mittelsenkrechte der Strecke \overline{FL} ist, gilt für beliebige Punkte $Q \in t$: $|FQ| = |LQ|$. Weil t nicht senkrecht zur Leitlinie g sein kann (dazu müsste ja F auf der Leitlinie liegen) und wegen $Q \neq P_0$ ist L nicht der Fußpunkt des Lotes von Q auf l . Es gilt daher $d(Q, l) < |LQ|$. Somit ist $d(Q, l) < |FQ|$; nach der Ortsdefinition der Parabel kann Q kein Parabelpunkt sein, und P_0 ist daher der einzige gemeinsame Punkt von t und der Parabel. Die Mittelsenkrechte t ist also Tangente an die Parabel in P_0 .

Die Tangente an eine Parabel in einem beliebigen Punkt P_0 halbiert also den Winkel zwischen der Geraden FP_0 und der Parallelen zur Parabelachse durch P_0 , woraus die oben genannte Brennpunkteigenschaft resultiert.

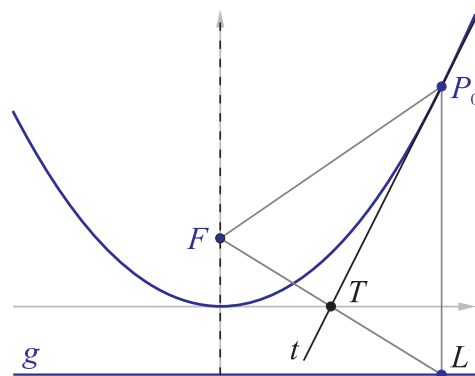


Abbildung 23: Begründung der Brennpunkteigenschaft der Parabel

Brennpunkteigenschaft der Ellipse

Bei einer Ellipse werden die Strahlen, die von einem Brennpunkt ausgehen, an der Ellipse so reflektiert, dass sie durch den anderen Brennpunkt verlaufen (Abb. 24 a), das heißt:

Für jeden Punkt P_0 einer Ellipse sind die Winkel, welche die Tangente an die Ellipse in diesem Punkt mit den Geraden F_1P_0 und F_2P_0 einschließt, gleich groß.

Eine uralte Anwendung sind Flüsterkabinette (Abb. 24 b): Stehen zwei Personen in einem Raum mit elliptischer Grundfläche und gut schallreflektierenden Wänden auf den Brennpunkten der Ellipse,

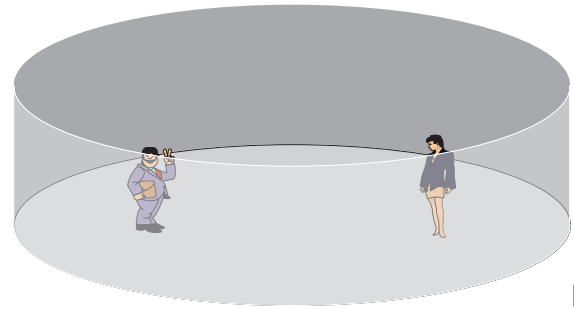
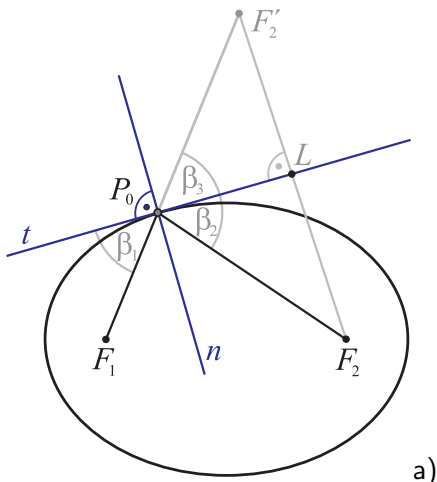


Abbildung 24: Brennpunkteigenschaft der Ellipse

so kann die eine Person die Sprache der anderen Person auch dann deutlich verstehen, wenn diese sehr leise spricht. Die Ursache für dieses Phänomen besteht darin, dass alle Schallwellen, die von der sprechenden Person ausgehen und in Gesichtshöhe auf die Wand treffen, zu der anderen Person reflektiert werden. Nachprüfbar ist dieser Effekt beispielsweise in der Londoner St Paul's Cathedral sowie im Kapitol in Washington.

Auch die Brennpunkteigenschaft der Ellipse lässt sich geometrisch begründen. Dazu zeigt man, dass die Senkrechte t auf der Winkelhalbierenden n des Winkels $\angle(F_1P_0F_2)$ in P_0 mit der Ellipse keinen weiteren Punkt außer P_0 gemeinsam hat. Die hierfür notwendige Hilfskonstruktion ist in Abb. 24 a) dargestellt: Von F_2 wird das Lot auf t gefällt und vom Fußpunkt L dieses Lotes auf dem F_2 gegenüberliegenden Strahl der Geraden LF_2 eine zu $\overline{LF_2}$ kongruente Strecke $\overline{LF'_2}$ angetragen. Es lässt sich leicht begründen, dass $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3$ ist und damit F_1, P_0 und F'_2 auf einer Geraden liegen. Damit erfüllt t die Brennpunkteigenschaft; es muss noch begründet werden, dass die Gerade t wirklich Tangente an die Ellipse in P_0 ist. Dazu zeigt man (wie bereits bei der Parabel), dass außer P_0 kein anderer Punkt von t der Ellipse angehören kann.

Aufgabe

25. Nimm an, dass die Gerade t außer P_0 einen weiteren Punkt Q mit der Ellipse gemeinsam hat, und führe diese Annahme zum Widerspruch. Nutze dafür die Definition der Ellipse und die Ungleichung $|QF_1| + |QF_2| > |F_1F'_2|$. (Begründe, warum diese Ungleichung gilt.)

Brennpunkteigenschaft der Hyperbel

Bei einer Hyperbel werden die Strahlen, die von einem Brennpunkt ausgehen, so an einem Hyperbelast reflektiert, als ob sie vom anderen Brennpunkt herkämen, das heißt:

Für jeden Punkt P_0 einer Hyperbel sind die Winkel, welche die Tangente mit den Geraden F_1P_0 und F_2P_0 einschließt, gleich groß.

Aufgabe

26. Beweise die Brennpunkteigenschaft der Hyperbel. Zeige dazu, dass die Winkelhalbierende t des Winkels $\angle(F_1, P_0, F_2)$ in P_0 mit der Hyperbel keinen weiteren Punkt außer P_0 gemeinsam hat, also Tangente an die Hyperbel ist. Nutze die in Abb. 25 dargestellte Hilfskonstruktion und gehe analog zum Nachweis der Brennpunkteigenschaft der Ellipse vor.

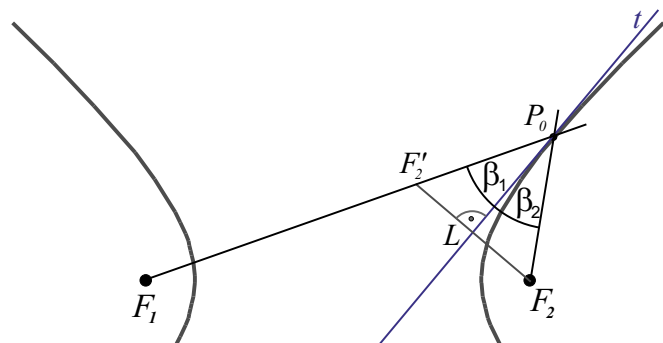


Abbildung 25: Brennpunkteigenschaft der Hyperbel

8 Exkurs: Zylinderschnitte

Der Schnitt eines (Kreis-)Zylinders mit einer Ebene führt neben den „trivialen“ Schnittfiguren Kreise, Geraden oder Parallelenpaare zu Kurven, die wie eine Ellipse aussehen. Dass diese Schnitte in der Tat Ellipsen sind, kann man mithilfe von Dandelin'schen Kugeln oder durch „Nachrechnen“ mit Methoden der Analytischen Geometrie überprüfen.

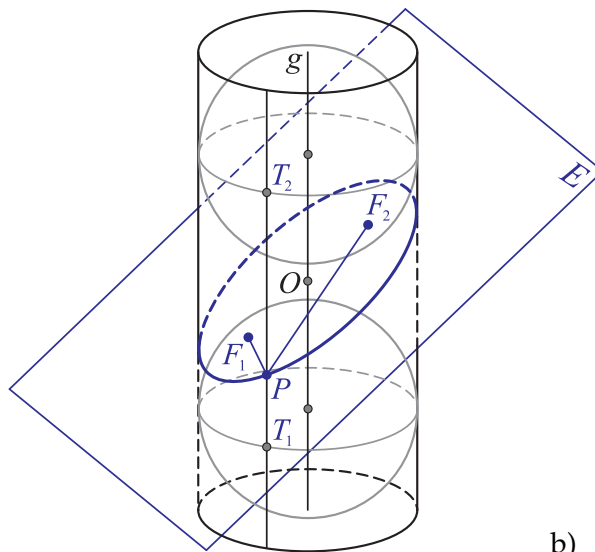


Abbildung 26:
Zylinderschnitte

Abb. 26 zeigt ein Modell und die zugehörige Zeichnung mit den Dandelin'schen Kugeln. Diese haben denselben Durchmesser wie der Zylinder und berühren die Schnittfigur in den Punkten F_1 und F_2 . Die Mantellinie durch einen beliebigen Punkt P der Schnittfigur schneidet die Berührkreise in den Punkten T_1 und T_2 . Dasselbe Argument wie bei der Ellipse in Abb. 14 auf S. 7 liefert wieder die Ortslinienbedingung

$$|F_1P| + |PF_2| = |T_1P| + |PT_2| = |T_1T_2| = \text{konstant}$$

und die Schnittfigur stellt sich, wie vermutet, als Ellipse heraus.

Der analytische Nachweis der Ellipseeigenschaft ist etwas komplizierter. Wichtigster Startpunkt ist die Wahl eines adäquaten Koordinatensystems (Abb. 27).

Wir gehen davon aus, dass der Radius des Zylinders $r = 1$ sei. Es sei g die Achse des Zylinders und O der Schnittpunkt von g mit der Schnittebene E . Der Vektor \vec{e}_3 sei ein normierter Richtungsvektor von g , \vec{e}_2 sei orthogonal zu \vec{e}_3 , parallel zu E und ebenfalls ein Einheitsvektor. Schließlich sei \vec{e}_1 ein Einheitsvektor, der \vec{e}_2 und \vec{e}_3 zu einem Orthonormal-System ergänzt. Mit diesem Koordinatensystem können wir die Gleichung

$$Z: x^2 + y^2 = 1$$

für den Zylinder ansetzen. Für die Ebene E gilt

$$E: \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad \text{bzw.} \quad m \cdot x - z = 0$$

(man beachte, dass $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ m \end{pmatrix}$ Richtungsvektoren von E sind, wobei m die in Abb. 27 angedeutete reelle Zahl ist).

Bezüglich des Koordinatensystem $\{O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\}$ gilt also

$$E \cap Z: x^2 + y^2 = 1 \quad \text{und} \quad z = m \cdot x.$$

Wir wählen ein neues Koordinatensystem mit den Basisvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ m \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} m \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, das zunächst nur ein *Orthogonal*-System ist (zwei der Vektoren sind nicht normiert). Die Koordinaten u, v, w bezüglich dieses Systems hängen mit x, y, z (bezüglich des alten Koordinatensystems) zusammen über

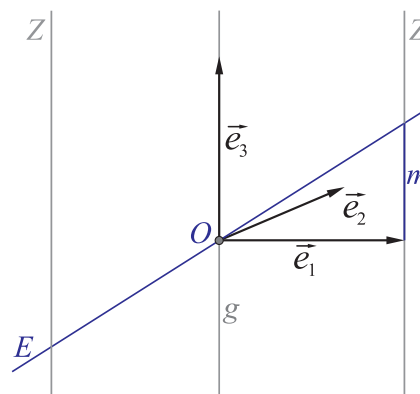


Abbildung 27: Koordinatensystem für die analytische Behandlung von Zylinderschnitten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ m \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \cdot \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ also } \begin{matrix} x = u + w \cdot m \\ y = v \\ z = u \cdot m - w. \end{matrix}$$

Bezüglich des neuen Systems lauten die Gleichungen für $E \cap Z$:

$$(u + w \cdot m)^2 + v^2 = 1 \text{ und } u \cdot m - w = m \cdot (u + w \cdot m).$$

Die letzte Gleichung wird umgeformt zu $0 = w \cdot (1 + m^2)$, woraus $w = 0$ folgt. Es gilt also

$$E \cap Z : u^2 + v^2 = 1 \text{ und } w = 0.$$

Affin gesehen sind wir jetzt schon fertig; wir wollen aber noch eine Gleichung bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems herleiten. Unser Orthogonalsystem wird dazu normalisiert zum Orthonormalsystem

$$\vec{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ m \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_3 = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \cdot \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

bezüglich dessen wir die Koordinaten $\tilde{v} = v$ und $\tilde{w} = 0$ haben. Die Koordinate \tilde{u} erhalten wir durch

$$u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ m \end{pmatrix} = u \cdot \sqrt{1+m^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ m \end{pmatrix} = u \cdot \sqrt{1+m^2} \cdot \vec{n}_1 = \tilde{u} \cdot \vec{n}_1 = \tilde{u} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ m \end{pmatrix},$$

also $u = \frac{\tilde{u}}{\sqrt{1+m^2}}$. Damit hat die Schnittfigur bezüglich des neuen Orthonormalsystems die Gleichung

$$E \cap Z : \frac{\tilde{u}^2}{(\sqrt{1+m^2})^2} + \frac{\tilde{v}^2}{1} = 1 \text{ und } \tilde{w} = 0,$$

was die Gleichung einer Ellipse in E darstellt. Für $m = 0$ haben wir, wie es auch sein muss, einen Kreis. Unsere Ellipse hat die Halbachsen 1 (dies ist der Kreisradius $r = 1$) und $\sqrt{1+m^2} \geq 1$.

„Wurstpellen-Abwicklung“

Wir schneiden einen Zylinder mit einem ebenen Schnitt durch und rollen den Mantel des unteren Teils auf. Was kann man über die Kurvenform der oberen Kante des entstehenden „Vierecks“ sagen? Die Vermutung, dass es sich um eine Sinuskurve handelt, liegt anschaulich nahe, muss aber begründet werden.

Für einen Ansatz ist wieder eine geeignete Koordinatisierung der Situation nötig: In den drei Teilen von Abb. 29 wird ein Punkt P der Schnitt-Ellipse in drei verschiedenen Sichten dargestellt. Der Zylinder habe den Radius r .

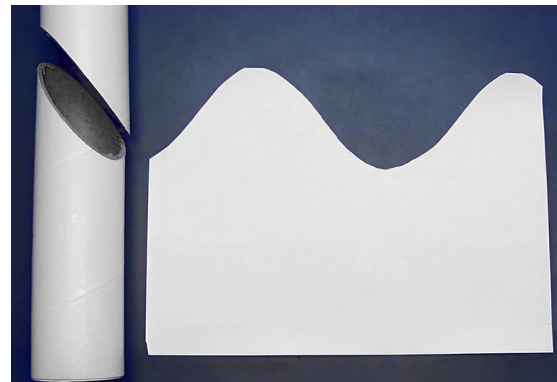
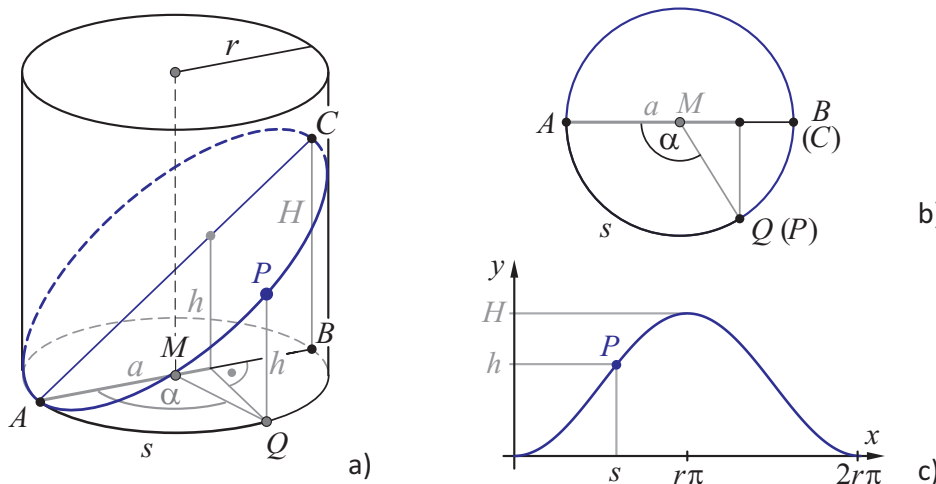


Abbildung 28: „Wurstpellen-Abwicklung“



b) Abbildung 29: Analyse der „Wurstpellen-Abwicklung“

Aufgabe

27. Weise mithilfe von Abb. 29 nach, dass die Abwicklung durch den Graphen einer Sinus- (bzw. Kosinus-)funktion beschrieben wird. (Abb. 29 b) zeigt die Ansicht von oben auf den Zylinder und c) die Abwicklung der Mantelfläche.)

9 Die allgemeine Scheitelgleichung der regulären Kegelschnitte

Mithilfe der Vektorrechnung ist es möglich, systematisch Schnittfiguren einer Ebene und eines Kreiskegels zu untersuchen.

Enthält eine Ebene die Spitze S eines Kreiskegels, so ist leicht zu überlegen, dass sich als Schnittfiguren ein einzelner Punkt (nämlich S), Geraden oder Paare von Geraden entstehen können. Diese Fälle werden im Folgenden nicht betrachtet, sondern die *regulären Kegelschnitte*, die sich als Schnittfiguren eines Kreiskegels K und einer Ebene ε ergeben, die nicht durch die Kegelspitze verläuft.

Um eine allgemeine Gleichung für Schnittfiguren einer Ebene und eines Kreiskegels herzuleiten, kommt der Wahl eines günstigen Koordinatensystems eine entscheidende Bedeutung zu. Als Koordinatenursprung O wählen wir denjenigen gemeinsamen Punkt von K und ε , der von der Kegelspitze S den geringsten Abstand hat, und als x -Achse die Gerade OA , wobei A der Schnittpunkt der Achse des Kegels mit ε ist; der Punkt A soll auf dem positiven Strahl der x -Achse liegen. Schließlich wählen wir als y -Achse die zur x -Achse senkrechte Gerade durch O in der Ebene ε und als z -Achse die durch O verlaufende und zu ε senkrechte Gerade (siehe Abb. 30 a für den Fall, dass ε nur eine Kegelhälfte und Abb. 30 b für den Fall, dass ε beide Kegelhälften schneidet).

Da die Ebene ε mit der x - y -Ebene identisch ist, gilt $z = 0$ für jeden Punkt P der Schnittmenge $K \cap \varepsilon$. Da O als derjenige Punkt von $K \cap \varepsilon$ gewählt war, der von S den kleinsten Abstand hat, liegt das Lot von S auf die x - y -Ebene auf der Geraden OA , also auf der x -Achse, es gilt somit $y_S = 0$. Über die Koordinaten der Punkte S und P ist somit $S(x_S; 0; z_S)$ und $P(x; y; 0)$ bekannt.

Ist $P \in K \cap \varepsilon$, so ist entweder $\angle(\vec{SP}, \vec{SA}) = \alpha$ (wie in Abb. 30 a) oder $\angle(\vec{SP}, \vec{SA}) = 180^\circ - \alpha$ (wie in Abb. 30 b), wobei α der halbe Öffnungswinkel des Kegels ist. Es gilt also

$$\cos \alpha = \cos \angle(\vec{SP}, \vec{SA}) = \frac{\vec{SP} \cdot \vec{SA}}{|\vec{SP}| \cdot |\vec{SA}|}$$

bzw.

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha = \cos \angle(\vec{SP}, \vec{SA}) = \frac{\vec{SP} \cdot \vec{SA}}{|\vec{SP}| \cdot |\vec{SA}|}.$$

Ist \vec{n} der zu \vec{SA} gleich gerichtete Einheitsvektor, so folgt daraus

$$\vec{SP} \cdot \vec{n} = |\vec{SP}| \cdot \cos \alpha \quad \text{oder} \quad \vec{SP} \cdot \vec{n} = -|\vec{SP}| \cdot \cos \alpha.$$

In beiden Fällen ergibt sich durch Quadrieren

$$(\vec{SP} \cdot \vec{n})^2 = |\vec{SP}|^2 \cdot \cos^2 \alpha.$$

Da auch O ein Punkt des Kegels mit $\angle(\vec{SO}, \vec{SA}) = \alpha$ ist, gilt auch

$$\vec{SO} \cdot \vec{n} = |\vec{SO}| \cdot \cos \alpha.$$

Wegen $\vec{SP} = \vec{SO} + \vec{OP}$ und damit $\vec{SP} \cdot \vec{n} = \vec{SO} \cdot \vec{n} + \vec{OP} \cdot \vec{n}$ folgt daraus

$$(*) \quad |\vec{SP}|^2 \cdot \cos^2 \alpha = (|\vec{SO}| \cdot \cos \alpha + \vec{OP} \cdot \vec{n})^2.$$

Um zu einer Gleichung der Schnittkurven zu gelangen, werden die in (*) auftretenden Vektoren in

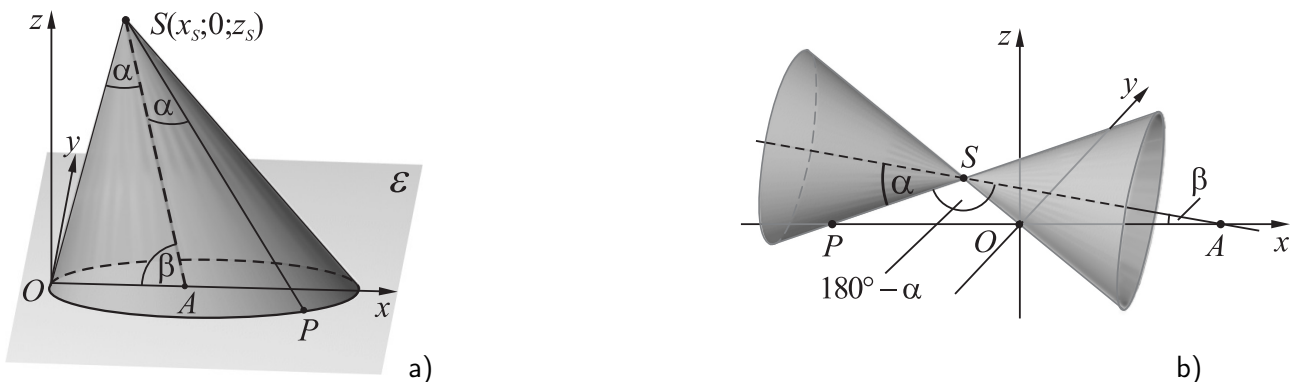


Abbildung 30: Festlegung eines Koordinatensystems für die Untersuchung von Schnittfiguren einer Ebene und eines Kreiskegels

Komponentenschreibweise eingesetzt. Wegen $S(x_S; 0; z_S)$ und $P(x; y; 0)$ ist

$$\vec{SO} = \begin{pmatrix} -x_S \\ 0 \\ -z_S \end{pmatrix}, \vec{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{SP} = \begin{pmatrix} x-x_S \\ y \\ -z_S \end{pmatrix}.$$

Da die y -Komponente des Vektors \vec{n} ebenfalls Null sein muss, lässt sich dieser Einheitsvektor durch $\vec{n} = \begin{pmatrix} x_n \\ 0 \\ z_n \end{pmatrix}$ (mit $x_n^2 + z_n^2 = 1$) darstellen, somit gilt $\vec{OP} \cdot \vec{n} = x \cdot x_n$.

Durch Einsetzen dieser Beziehungen in (*) ergibt sich:

$$(x^2 + x_S^2 - 2xx_S + y^2 + z_S^2) \cos^2 \alpha = (x_S^2 + z_S^2) \cos^2 \alpha + 2xx_n \cos \alpha \sqrt{x_S^2 + z_S^2} + x^2 x_n^2.$$

Durch Vereinfachen dieser Gleichung und Auflösen nach y^2 ergibt sich

$$(**) \quad y^2 = 2 \left(\frac{x_n}{\cos \alpha} \sqrt{x_S^2 + z_S^2} + x_S \right) \cdot x + \left(\frac{x_n^2}{\cos^2 \alpha} - 1 \right) \cdot x^2$$

als Gleichung für einen beliebigen regulären Kegelschnitt. Um diese Gleichung in einer übersichtlicheren Form schreiben zu können, werden zwei Bezeichnungen eingeführt:

$$\varepsilon := \frac{x_n}{\cos \alpha}, \quad p := \varepsilon \cdot \sqrt{x_S^2 + z_S^2} + x_S.$$

Die Größe ε wird als *numerische Exzentrizität*, p als *Parameter* eines Kegelschnittes bezeichnet. Die Gleichung (**) nimmt damit die folgende Gestalt an.

Allgemeine Scheitelgleichung der regulären Kegelschnitte

Ein regulärer Kegelschnitt mit der numerischen Exzentrizität ε und dem Parameter p wird durch die Gleichung

$$y^2 = 2 p x + (\varepsilon^2 - 1) x^2 \quad (5)$$

beschrieben.

Für die numerische Exzentrizität eines Kegelschnittes gilt $\varepsilon = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}$, wobei β der Schnittwinkel zwischen der Ebene und der Kegelachse sowie 2α der Öffnungswinkel des Kegels ist (siehe Abb. 30). Dies folgt daraus, dass der Schnittwinkel β aufgrund der Wahl des Koordinatensystems der Winkel zwischen \vec{n} und einem Einheitsvektor in Richtung der x -Achse ist. Da \vec{n} ebenfalls ein Einheitsvektor ist, gilt $\cos \beta = \vec{n} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x_n$ und somit $\varepsilon = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}$. Da α ein spitzer und β ein spitzer oder ein rechter Winkel ist, gilt $\varepsilon \geq 0$.

Wir untersuchen im Folgenden systematisch in Abhängigkeit von der numerischen Exzentrizität ε , welche Kurven durch die allgemeine Scheitelgleichung (5) beschrieben werden.

Fall 1: $\varepsilon = 0$. Wegen $\varepsilon = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}$ ist in diesem Falle $\cos \beta = 0$, also $\beta = 90^\circ$; die Kegelachse steht senkrecht auf der Schnittebene, und die Schnittfigur ist ein Kreis. Setzt man $\varepsilon = 0$ in die Gleichung (5) ein, so ergibt sich

$$y^2 = 2px - x^2 = p^2 - (x-p)^2 \quad \text{bzw.} \quad (x-p)^2 + y^2 = p^2,$$

also tatsächlich die Gleichung eines *Kreises* mit dem Mittelpunkt $M(p; 0)$.

Fall 2: $0 < \varepsilon < 1$. In diesem Falle müsste anhand anschaulicher Überlegungen wegen $\frac{\cos \beta}{\cos \alpha} < 1$ (und daher $\cos \beta < \cos \alpha$, also $\beta > \alpha$) eine Ellipse entstehen. Mit $k = -(\varepsilon^2 - 1)$ (also $k > 0$) nimmt (5) die Gestalt

$$y^2 = 2px - kx^2 = \frac{p^2}{k} - \frac{p^2}{k} + 2px - kx^2 = \frac{p^2}{k} - k \left(x - \frac{p}{k} \right)^2,$$

$$y^2 + k \left(x - \frac{p}{k} \right)^2 = \frac{p^2}{k} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\left(x - \frac{p}{k} \right)^2}{\frac{p^2}{k^2}} + \frac{y^2}{\frac{p^2}{k}} = 1$$

an. Es handelt sich um die Gleichung einer *Ellipse* in achsenparalleler Lage, siehe S. ??.

Fall 3: $\varepsilon = 1$. In diesem Falle sind der Schnittwinkel β zwischen der Ebene und der Kegelachse und der halbe Öffnungswinkel α des Kegels gleich groß. Die Scheitelgleichung (5) erhält die Form

$$y^2 = 2 p x,$$

beschreibt also eine *Parabel*.

Fall 4: $\varepsilon > 1$. In diesem Falle ist $\beta < \alpha$, anhand anschaulicher Überlegungen müsste als Schnittfigur eine Hyperbel entstehen. Durch die Umformung der Scheitelgleichung (5) lässt sich dies bestätigen. Setzt man $k := \varepsilon^2 - 1$ (also $k > 0$) so nimmt (5) die Gestalt

$$y^2 = 2px + kx^2 = -\frac{p^2}{k} + \frac{p^2}{k} + 2px + kx^2 = -\frac{p^2}{k} + k\left(x + \frac{p}{k}\right)^2,$$

$$k\left(x + \frac{p}{k}\right)^2 - y^2 = \frac{p^2}{k} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\left(x + \frac{p}{k}\right)^2}{\frac{p^2}{k^2}} - \frac{y^2}{\frac{p^2}{k}} = 1$$

an. Diese Gleichung beschreibt eine *Hyperbel* in achsenparalleler Lage.

Mit dieser Herleitung wurde die Rechtfertigung dafür erbracht, Kreise, Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln als *Kegelschnitte* zu bezeichnen und gleichzeitig gezeigt, dass Schnitte eines geraden Kreiskegels und einer Ebene, die nicht durch die Kegelspitze verläuft, stets Ellipsen (bzw. speziell Kreise), Hyperbeln und Parabeln sind.

10 Quadratische Formen

Wenn wir die Kegelschnitte Ellipse, Parabel und Hyperbel mit „algebraischen“ Augen betrachten, so fällt auf, dass jede Kurve eine Gleichung $f(x, y) = 0$ hat, bei der die Variablen höchstens in der Potenz 2 auftreten: In ihrer einfachsten Form waren es $y = x^2$ für die Parabel, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ für die Ellipse und (je nach Wahl des Koordinatensystems) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ oder auch $y = \frac{1}{x}$, also $x \cdot y = 1$, für die Hyperbel. Welche „allgemeine“ Gleichung umfasst alle konkreten Beispiele? Die allgemeine Aufgabe lautet, man bestimme alle Punkte der Ebene, deren Koordinaten einer quadratischen Gleichung

$$a \cdot x^2 + b \cdot x \cdot y + c \cdot y^2 + d \cdot x + e \cdot y + f = 0$$

mit Koeffizienten $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ sowie mit Variablen x und y genügen. Die linke Seite dieser Gleichung nennt man eine *quadratische Form* in \mathbb{R}^2 , die Lösungsmenge der Gleichung eine Kurve zweiter Ordnung oder eine (zweidimensionale) Quadrik. Eine „echte“ quadratische Form liegt natürlich nur vor, wenn mindestens einer der Koeffizienten a, b oder c ungleich Null ist. Die drei bekannten Kurven sind Kurven zweiter Ordnung und damit Lösungsmengen geeigneter quadratischer Formen.

Auf den ersten Blick erwartet man, dass eine quadratische Form mit ihren sechs Parametern zu neuen Kurven führt. Wir werden jedoch sehen, dass das nicht so ist, sondern dass wir schon alle möglichen Lösungsmengen kennengelernt haben. Der „Trick“ zum Nachweis wird darin bestehen, dass man eine vorgegebene quadratische Form durch Wahl eines passenden Koordinatensystems auf eine der bekannten „Normalformen“ bringt.

Die folgende Klassifikation ist nicht die mathematisch eleganteste Form,² sie hat dafür den Vorteil der Elementarität. Wir verändern jeweils die Basis durch (affine) Basistransformationen, wobei wir am Ende genau die bekannten Kegelschnitte bekommen. Dass wir affine und keine kartesischen Koordinatentransformationen verwenden, ändert den Typ dieser Kurven nicht.

Wir gehen von der Gleichung

$$a \cdot x^2 + b \cdot x \cdot y + c \cdot y^2 + d \cdot x + e \cdot y + f = 0$$

für die Punkte einer Quadrik aus. Durch geeignete Koordinatenwechsel vom System $\{x, y\}$ in ein System $\{x', y'\}$ vereinfachen wir diese Gleichung und gelangen zu den schon bekannten Kegelschnitten. Wir gehen schrittweise vor:

- Es gelte $a = b = c = 0$. Jetzt ist die Quadrik je nach dem Wert von d, e und f eine Gerade, die leere Menge oder ganz \mathbb{R}^2 .
- Ist $a = 0$, aber $c \neq 0$, so kann man durch Vertauschen von x und y erreichen, dass der Koeffizient bei x^2 ungleich Null ist.

²Der mathematisch befriedigende, da verallgemeinerbare Weg führt über die Darstellung $Q(\vec{x}) = \vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x} + \vec{b} \cdot \vec{x} + c$ mit einem Vektor \vec{x} , seiner Transponierten \vec{x}^T , einer symmetrischen Matrix A , einem Koeffizientenvektor \vec{b} und einer reellen Konstanten c einer quadratischen Form Q . In unserem Fall sind Matrix und Vektoren zweidimensional. Der allgemeine Fall ist n -dimensional mit „Hyperflächen 2. Ordnung“ oder „Quadriken“ im \mathbb{R}^n . Die Klassifikation der Quadriken geschieht dann durch geeignete Basistransformationen, wobei die n reellen Eigenwerte der symmetrischen Matrix A die wesentliche Rolle spielen.

c. Wenn $a = c = 0$, aber $b \neq 0$ ist, so führen wir durch $x = x'$ und $y = x' + y'$ neue Koordinaten x', y' ein. Unsere Gleichung wird jetzt zu

$$b \cdot x \cdot y + \dots = b \cdot x' \cdot (x' + y') + \dots = b \cdot x'^2 + b \cdot x' \cdot y' + \dots$$

d. Nach b. und c. können wir voraussetzen, dass der neue Koeffizient a bei x^2 ungleich Null ist. Nach Division der Gleichung durch a' können wir ab jetzt annehmen, dass für den Koeffizienten bei x^2 gilt $a = 1$.

e. Wir schreiben wieder x, y anstelle von x', y' . Jetzt haben wir die quadratische Form

$$x^2 + b \cdot x \cdot y + c \cdot y^2 + d \cdot x + e \cdot y + f.$$

Die Transformation $x = x' - \frac{b}{2} \cdot y', y = y'$ bewirkt

$$\begin{aligned} x^2 + b \cdot x \cdot y + c \cdot y^2 + \dots &= \left(x' - \frac{b}{2} \cdot y'\right)^2 + b \cdot \left(x' - \frac{b}{2} \cdot y'\right) \cdot y' + c \cdot y'^2 + \dots \\ &= x'^2 - b \cdot x' \cdot y' + \frac{b^2}{4} y'^2 + b \cdot x' \cdot y' - \frac{b^2}{2} y'^2 + c \cdot y'^2 + \dots \\ &= x'^2 + c' \cdot y'^2 + \dots, \end{aligned}$$

d. h. dass das gemischte Glied $x' \cdot y'$ verschwindet. Wieder mit den alten Variablen-Namen haben wir jetzt die quadratische Form

$$x^2 + c \cdot y^2 + d \cdot x + e \cdot y + f$$

erreicht.

f. Die nächste Transformation lässt den Term mit x verschwinden: Wir setzen hierfür für die neuen Variablen $x = x' - \frac{d}{2}, y = y'$. Damit nimmt unsere quadratische Form die Gestalt

$$x^2 + c \cdot y^2 + e \cdot y + f$$

an. Für y ist dieser Trick allerdings nur anwendbar, wenn $c \neq 0$ ist. Wir müssen jetzt also eine Fallunterscheidung in $c = 0$ und $c \neq 0$ durchführen.

$c = 0$: Damit haben wir die quadratische Form $x^2 + e \cdot y + f$. Gilt auch $e = 0$, so haben wir die einfache Gleichung $x^2 + f = 0$ zu untersuchen. Ist $f < 0$, so ist die Lösungsmenge ein Paar von zwei Parallelen zur y -Achse, für $f = 0$ die y -Achse und für $f > 0$ die leere Menge. Gilt dagegen $e \neq 0$, so erhalten wir die Gleichung $y = \frac{-1}{e} \cdot (x^2 + f)$, deren Lösungsmenge eine Parabel ist.

$c \neq 0$: Analog zu Schritt f. setzen wir $x = x'$ und $y = y' - \frac{e}{2c}$. Dies bewirkt, dass auch der Term mit y verschwindet. Wieder mit den alten Variablen-Namen haben wir die Gleichung

$$x^2 + c \cdot y^2 + f = 0$$

erhalten. Diese Gleichung hat die folgenden Lösungsmengen:

- Für $c > 0$ gibt es die drei Fälle leere Menge für $f > 0$, den Punkt $P(0 | 0)$ für $f = 0$ und eine Ellipse für $f < 0$.

- Für $c < 0$ und $f = 0$ haben wir das Paar sich schneidender Geraden $x = \pm \sqrt{-c} \cdot y$.

Für $c < 0$ und $f \neq 0$ formen wir die Gleichung weiter um zu

$$(x - \sqrt{-c} \cdot y) \cdot (x + \sqrt{-c} \cdot y) = -f,$$

deren Lösungsmenge sich nach der letzten Transformation

$x' = x - \sqrt{-c} \cdot y, y' = x + \sqrt{-c} \cdot y$ als Hyperbel erweist.

Die Analyse hat gezeigt, dass die quadratischen Formen (bis auf Trivialfälle) genau die Kegelschnitte beschreiben.

Lösungen der Aufgaben

1. Oberer Ast: $z = \cot \alpha \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$
 Unterer Ast: $z = -\cot \alpha \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$

2. a) Für die Hauptscheitel S_1 und S_2 gilt

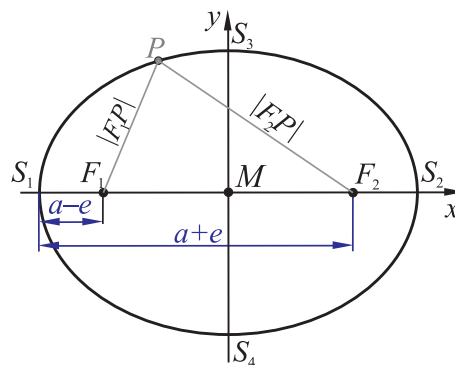
$$\begin{aligned} |F_1 S_1| + |F_2 S_1| &= (a - e) + (a + e) = 2a, \\ |F_1 S_2| + |F_2 S_2| &= (a + e) + (a - e) = 2a. \end{aligned}$$

Da die Hauptscheitel selbst Punkte der Ellipse sind, muss wegen der Ortsdefinition der Ellipse für alle Punkte P der Ellipse die Behauptung $|F_1 P| + |F_2 P| = 2a$ erfüllt sein.

- b) Nach a) gilt für einen Nebenscheitel S_3 :

$$|F_1 S_3| + |F_2 S_3| = 2a.$$

Da $|F_1 S_3| = |F_2 S_3|$ sein muss, hat die Hypotenuse des Dreiecks $\triangle M F_1 S_3$ die Länge a . Wegen $|M S_3| = b$ und $|M F_1| = e$ ergibt sich die Behauptung daher aus dem Satz des Pythagoras.



3. Für $||F_1 P| - |F_2 P|| = 0$ beschreibe die Definition eine Gerade (die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{F_1 F_2}$). Somit würde es sich nicht mehr um eine „echte“ Hyperbel handeln; daher wird dieser Fall durch die Definition ausgeschlossen.
4. Die Gültigkeit der Gleichung $||F_1 S_1| - |F_2 S_1|| = 2a$ ist anhand von Abb. 8 sofort ersichtlich. Wegen der Definition der Hyperbel muß dann für jeden ihrer Punkte P gelten: $||F_1 P| - |F_2 P|| = 2a$.
5. Es ist zu zeigen, dass $||F_1 P| - |F_2 P||$ für alle Punkte $P(x; \frac{1}{x})$ mit $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ gleich, also unabhängig von x ist. Wir berechnen dazu $(|F_1 P| - |F_2 P|)^2$:

$$\begin{aligned} (|F_1 P| - |F_2 P|)^2 &= \left(\sqrt{(\sqrt{2}-x)^2 + \left(\sqrt{2}-\frac{1}{x}\right)^2} - \sqrt{(-\sqrt{2}-x)^2 + \left(-\sqrt{2}-\frac{1}{x}\right)^2} \right)^2 \\ &= \left(\sqrt{(\sqrt{2}-x)^2 + \left(\sqrt{2}-\frac{1}{x}\right)^2} + \sqrt{(\sqrt{2}+x)^2 + \left(\sqrt{2}+\frac{1}{x}\right)^2} \right)^2 \\ &\quad - 2\sqrt{\left((\sqrt{2}-x)^2 + \left(\sqrt{2}-\frac{1}{x}\right)^2 \right) \cdot \left((\sqrt{2}+x)^2 + \left(\sqrt{2}+\frac{1}{x}\right)^2 \right)} \end{aligned}$$

Der Ausdruck unter der letzten Wurzel lässt sich zu $x^4 + \frac{1}{x^4} + 2$ vereinfachen. Damit (und nach Vereinfachung der darüber stehenden Zeile) ergibt sich

$$\begin{aligned} (|F_1 P| - |F_2 P|)^2 &= 8 + 2x^2 + 2\frac{1}{x^2} - 2\sqrt{x^4 + \frac{1}{x^4} + 2} \\ &= 8 + 2x^2 + 2\frac{1}{x^2} - 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 8. \end{aligned}$$

Es gilt somit $||F_1 P| - |F_2 P|| = \sqrt{8}$ für alle Punkte P des Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$. Alle Punkte des Funktionsgraphen gehören somit zu der Hyperbel mit den Brennpunkten F_1 und F_2 sowie dem Abstand der Scheitelpunkte $2a = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Ohne Beweis sei angemerkt, dass umgekehrt alle Punkte dieser Hyperbel auch Punkte des Funktionsgraphen sind.

6. Für die Abstände der Punkte P_1 und P_2 von der Leitlinie l gilt (unter Verwendung der Bezeichnungen aus Abb. 10): $d(P_1, l) = d(P_2, l) = |LF| = p$.

Nach der Definition der Parabel ist dann $|FP_1| = |FP_2| = p$ und somit $|P_1 P_2| = |FP_1| + |FP_2| = 2p$.

7. Für die Abstände eines beliebigen Punktes $P(x; ax^2)$ vom Brennpunkt und von der Leitlinie gilt

$$|PF|^2 = x^2 + \left(ax^2 - \frac{1}{4a}\right)^2 = x^2 + a^2x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{16a^2} = a^2x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{16a^2},$$

$$(d(P, l))^2 = \left(ax^2 + \frac{1}{4a}\right)^2 = a^2x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{16a^2}.$$

Beide Abstände sind also gleich.

8. Da S ein Punkt der Parabel ist, gilt $|SF| = d(S, l)$. Weiterhin ist L der Fußpunkt des Lotes von S auf l und somit $|SF| = |SL|$. Aus $|LF| = p$ folgt damit die Behauptung $|LS| = |SF| = \frac{p}{2}$.

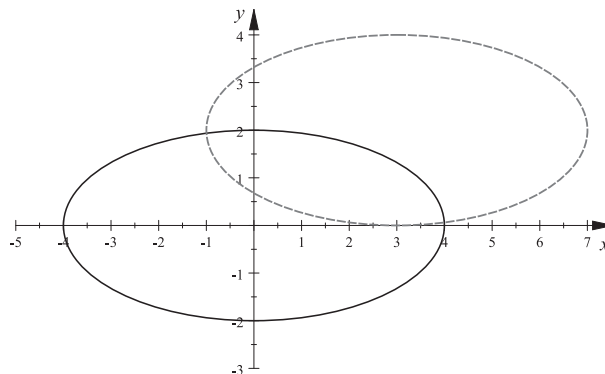
9. a) $9x^2 + 25y^2 = 225$ b) $4x^2 + 13y^2 = 52$
 c) $9x^2 + 25y^2 = 900$ d) $3x^2 + 4y^2 = 48$

10. $a = 10, b = 8, e = 6, F_1(-6;0), F_2(6;0)$

11. Sei $P(x; y)$ ein Punkt mit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = d > 1$. Dann liegt der Punkt $P_0(x_0; y_0)$ mit $x_0 = \frac{x}{\sqrt{d}}$ und $y_0 = \frac{y}{\sqrt{d}}$ mit P auf einer Geraden durch den Mittelpunkt M der Ellipse und hat von M den Abstand $\sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \frac{1}{\sqrt{d}}\sqrt{x^2 + y^2}$, also einen kleineren Abstand als P . Weiterhin gilt $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = \frac{x^2}{da^2} + \frac{y^2}{db^2} = \frac{d}{d} = 1$. P_0 ist also ein Punkt der Ellipse der zwischen M und P liegt; P liegt somit außerhalb der Ellipse.

Für Punkte innerhalb der Ellipse lässt sich der Beweis (mit $d < 1$) völlig analog führen.

12. Eine Gleichung der verschobenen Ellipse ist $\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$.



13. Es sei P ein beliebiger Punkt der Hyperbel und P' der Fußpunkt des Lotes von P auf die x -Achse. Falls P keiner der beiden Hauptscheitel ist, so sind $\Delta F_1PP'$ und $\Delta F_2PP'$ rechtwinklige Dreiecke mit $|PP'| = |y|$, $|F_1P'| = |e-x|$ und $|F_2P'| = |e+x|$ oder $|F_1P'| = |e+x|$ und $|F_2P'| = |e-x|$. In den Dreiecken $\Delta F_1PP'$ und $\Delta F_2PP'$ gilt nach dem Satz des Pythagoras:

$$|F_1P| = \sqrt{y^2 + (e-x)^2}, \quad |F_2P| = \sqrt{y^2 + (e+x)^2} \quad \text{oder}$$

$$|F_1P| = \sqrt{y^2 + (e+x)^2}, \quad |F_2P| = \sqrt{y^2 + (e-x)^2}.$$

In beiden Fällen ist

$$|F_1P| - |F_2P| = \left| \sqrt{y^2 + (e-x)^2} - \sqrt{y^2 + (e+x)^2} \right|$$

und wegen Satz auf S. 4

$$(1) \quad \left| \sqrt{y^2 + (e-x)^2} - \sqrt{y^2 + (e+x)^2} \right| = 2a.$$

Für den Fall, dass P einer der beiden Hauptscheitel ist, kann die Gültigkeit von (1) ebenfalls sehr leicht gezeigt werden. Quadrieren von (1) ergibt

$$(2) \quad y^2 + (e-x)^2 + y^2 + (e+x)^2 - 2\sqrt{y^2 + (e-x)^2}\sqrt{y^2 + (e+x)^2} = 4a^2$$

bzw.

$$(3) \quad \sqrt{y^2 + (e-x)^2} \sqrt{y^2 + (e+x)^2} = y^2 + e^2 + x^2 - 2a^2.$$

Durch Quadrieren von (3) erhalten wir

$$(y^2 + (e-x)^2)(y^2 + (e+x)^2) = (y^2 + e^2 + x^2 - 2a^2)^2,$$

woraus durch Vereinfachen

$$-e^2x^2 = a^4 - y^2a^2 - e^2a^2 - x^2a^2$$

bzw.

$$(a^2 - e^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2)$$

wird. Wir ersetzen $e^2 - a^2$ durch b^2 und erhalten

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2 \quad \text{bzw.} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

14. a) $9x^2 - 16y^2 = 144$ b) $5x^2 - 7y^2 = 17$

15. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = 1$

16. Ein derartiges Quadrat lässt sich für alle Hyperbeln mit $a < b$ finden. Die Koordinaten der vier Eckpunkte sind $x = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2}}$ und $y = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2}}$. Die Seitenlänge beträgt $\frac{2ab}{\sqrt{b^2 - a^2}}$.

17. a) $y^2 = 8x$ b) $y^2 = 12x$ c) $y^2 = -4x$

18. Es existieren zwei Parabeln, welche die Bedingungen erfüllen. Ihre Gleichungen sind $y^2 = x$ und $y^2 = -x$.

19. a) $F(5;0)$, $l: x = -5$ b) $F(-0,25;0)$, $l: x = 0,25$

c) $F(0;0,25)$, $l: y = -0,25$

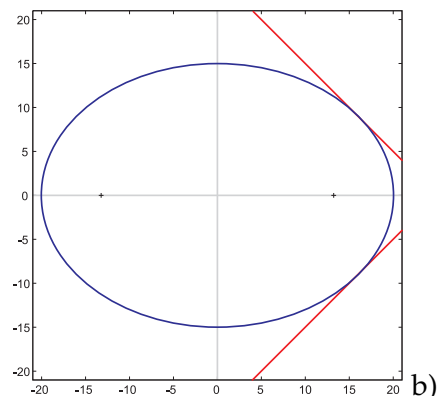
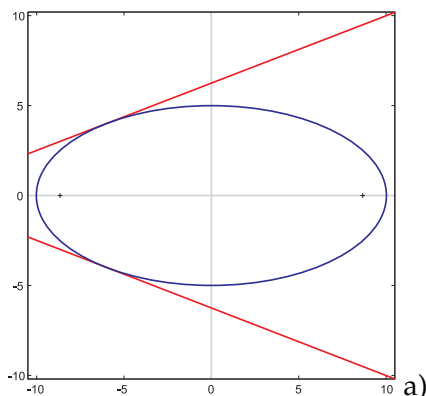
20. $p = 3,6$

21. a) $M(-2; -3)$, $a = 2$, $b = 1$ b) $M(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$, $a = \frac{1}{4}\sqrt{2}$, $b = \frac{1}{2}$

22. a) $y_{01} = 4$, $y_{02} = -4$, $t_1: -\frac{6x}{100} + \frac{4y}{25} = 1$, $t_2: -\frac{6x}{100} - \frac{4y}{25} = 1$

b) $y_{01} = 9$, $y_{02} = -9$, $t_1: x + y = 25$, $t_2: x - y = 25$

Graphische Darstellungen (angefertigt mit Maxima):



23. a) $10x + 12y = 64$ b) $5x + 4y = 44$

24. a) $y = 2x + 0,25$ b) $y = x + 0,5$

25. Aus der Dreiecksungleichung und der Annahme, dass der Punkt Q ein anderer Punkt sein soll als P_0 , folgt

$$(1) \quad |QF_1| + |QF_2| > |F_1F_2'|.$$

Da t Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{F_2F_2'}$ ist und Q ein Punkt von t , gilt

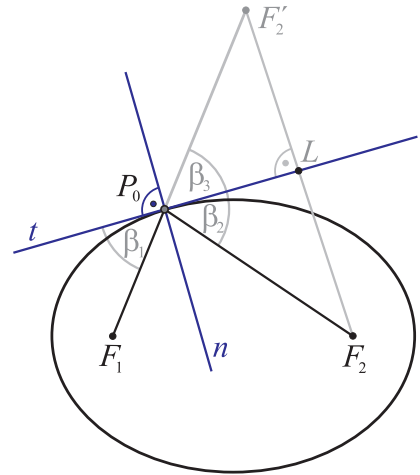
$$(2) \quad |QF_2| = |QF_2'|.$$

Aus (1) und (2) ergibt sich:

$$|QF_1| + |QF_2| = |QF_1| + |QF_2'| > |F_1F_2'| = |P_0F_1| + |P_0F_2|$$

$$\text{bzw. } |QF_1| + |QF_2| > 2a.$$

Q ist demnach kein Punkt der Ellipse. Die Gerade t hat somit nur einen Punkt mit der Ellipse gemeinsam, ist also Tangente.



26. Von F_2 wird das Lot auf die Winkelhalbierende t gefällt und vom Fußpunkt L dieses Lotes auf dem F_2 gegenüberliegenden Strahl der Geraden LF_2 eine zu $\overline{LF_2}$ kongruente Strecke $\overline{LF_2'}$ angetragen. Es gilt daher $\overline{LF_2} \cong \overline{LF_2'}$, $F_2F_2' \perp t$ und $\beta_1 = \beta_2$. Da weiterhin t Winkelhalbierende des Winkels $\angle(F_1, P_0, F_2)$ ist, muß F_2' auf der Geraden F_1P_0 liegen.

$$(1) \quad |QF_1| - |QF_2| < |F_1F_2'|.$$

Wir nehmen an, dass t außer P_0 noch einen anderen Punkt Q enthält, der ebenfalls der Hyperbel angehört. Aus der Dreiecksungleichung und der Annahme $Q \neq P_0$ folgt

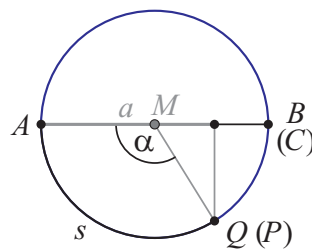
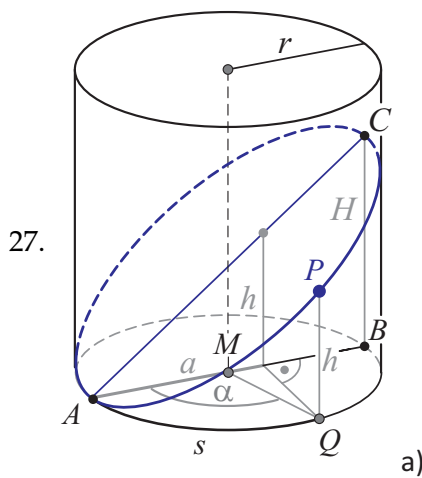
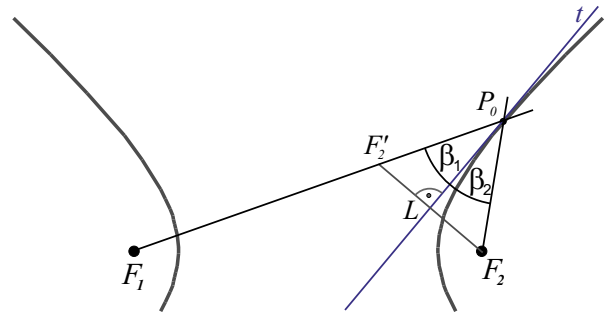
Da t Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{F_2F_2'}$ und Q ein Punkt von t ist, gilt

$$(2) \quad |QF_2| = |QF_2'|.$$

Aus (1) und (2) ergibt sich:

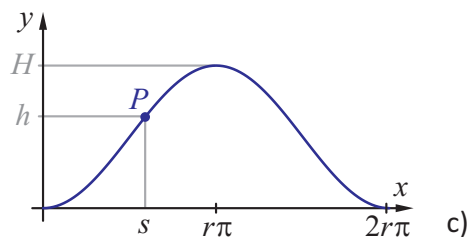
$$|QF_1| - |QF_2| = |QF_1| - |QF_2'| < |F_1F_2'| = |P_0F_1| - |P_0F_2| \text{ bzw. } |QF_1| - |QF_2| < 2a.$$

Q ist demnach kein Punkt der Hyperbel. Somit kann die Winkelhalbierende t mit der Hyperbel keinen weiteren Punkt außer P_0 gemeinsam haben und ist daher Tangente.



b)

Abbildung 29



c)

Der Punkt P der Ellipse hat in Abb. 29 a) die Höhe h über dem zugehörigen Schnittkreis. Abb. 29 b) zeigt die Ansicht von oben auf den Zylinder und c) die Abwicklung der Mantelfläche. Den Winkel $\alpha = \angle(AMQ)$ kann man wegen $\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{s}{2r\pi}$, wobei s der zugehörige Kreisbogen ist, darstellen als $\alpha = \frac{s}{r}$. Die Höhe h findet sich ebenfalls im Dreieck ABC ; der zweite Strahlensatz ergibt

$$\frac{h}{H} = \frac{a}{2r}, \text{ also } h = \frac{H}{2r} \cdot a.$$

Eine trigonometrische Überlegung in Abb. 29 b) ergibt

$$a = r - r \cdot \cos(\alpha) = r \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{s}{r}\right)\right).$$

Zusammen folgt die Kurvengleichung

$$h(s) = \frac{H}{2} \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{s}{r}\right)\right),$$

so dass tatsächlich eine Sinuskurve vorliegt.