Der Begriff des Vektorraumes

Definition

Eine nicht leere Menge V zusammen mit einer inneren Verknüpfung

$$+ : V \times V \to V\,, \quad (\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u} + \vec{v}$$

und einer äußeren Verknüpfung

$$\cdot : \mathbb{R} \times V \to V\,, \quad (\lambda, \vec{u}) \mapsto \lambda \cdot \vec{u}$$

heißt *reeller Vektorraum* bzw. Vektorraum über dem Körper der reellen Zahlen,[1] falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

A1. Für beliebige $\vec{u}, \vec{v} \in V$ gilt $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (*Kommutativität der Addition)*.

A2. Für beliebige $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ gilt $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ (*Assoziativität der Addition*).

A3. Es existiert $\vec{o} \in V$, so dass für alle $\vec{u} \in V$ gilt: $\vec{u} + \vec{o} = \vec{u}$ (*Existenz eines Nullvektors*).

A4. Zu jedem $\vec{u} \in V$ existiert $-\vec{u} \in V$ mit $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{o}$ (*Existenz eines Gegenvektors zu jedem Vektor*).

S1. Für beliebige $\vec{u} \in V$ gilt $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$.

S2. Für beliebige $\vec{u} \in V$ und beliebige $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt $(\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{u})$
(*Assoziativität der Multiplikation von Vektoren mit reellen Zahlen*).

S3. Für beliebige $\vec{u}, \vec{v} \in V$ und beliebige $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}$ (*1. Distributivgesetz*).

S4. Für beliebige $\vec{u} \in V$ und beliebige $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt $(\lambda + \mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{u}$ (*2. Distributivgesetz*).

Bemerkungen:

- Die Bedingungen $+ : V \times V \to V$ sowie $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ beinhalten die *Abgeschlossenheit* der Menge V bezüglich der Verknüpfungen + und $\cdot$, d. h. für beliebige $\vec{u}, \vec{v} \in V$ ist $\vec{u} + \vec{v} \in V$ und für beliebige $\lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{u} \in V$ ist $\lambda \cdot \vec{u} \in V$.
- Die Eigenschaften A1-A4 lassen sich dahin gehend zusammenfassen, dass $(V, +)$, d. h. die Menge V zusammen mit der Verknüpfung $+$, eine *Abelsche* (kommutative) *Gruppe* bildet.
- Mithilfe der obigen Definition kann der Begriff „Vektor“ nun allgemein definiert werden: *Ist* $(V, +, \cdot)$ *ein Vektorraum, so heißen die Elemente von* V *Vektoren*.

Satz

1. Für alle Vektoren $\vec{u}$ ist $0 \cdot \vec{u} = \vec{o}$.
2. Der Nullvektor $\vec{o}$ ist eindeutig bestimmt.
3. Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $\lambda \cdot \vec{o} = \vec{o}$.
4. Für jeden Vektor $\vec{u}$ ist der Gegenvektor $-\vec{u}$ eindeutig bestimmt.
5. Für alle Vektoren $\vec{u}$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $(-\lambda) \cdot \vec{u} = -(\lambda \cdot \vec{u})$.
6. Für alle Vektoren $\vec{u}$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $\lambda \cdot (-\vec{u}) = -(\lambda \cdot \vec{u})$.
7. Für alle Vektoren $\vec{u}$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt: Aus $\lambda \cdot \vec{u} = \vec{o}$ folgt $\lambda = 0$ oder $\vec{u} = \vec{o}$.

Die Beweise erfolgen mithilfe der Definition des Vektorraumbegriffs.

Aufgaben

1. Weisen Sie nach, dass in jedem Vektorraum V für drei beliebige Vektoren $\vec{p}, \vec{x}, \vec{y} \in V$ gilt:
   $\vec{p} + \vec{x} = \vec{p} + \vec{y} \;\Rightarrow\; \vec{x} = \vec{y}$.
2. Weisen Sie nach, dass für alle Vektoren $\vec{p}, \vec{q}$ eines Vektorraumes V und alle Skalare $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:
   a) Falls $\lambda \cdot \vec{p} = \lambda \cdot \vec{q}$ und $\lambda \neq 0$, so ist $\vec{p} = \vec{q}$.
   b) Falls $\lambda \cdot \vec{p} = \mu \cdot \vec{p}$ und $\vec{p} \neq \vec{o}$, so ist $\lambda = \mu$.
3. Die Menge $\mathbb{R}^n$ aller n-Tupel reeller Zahlen mit den komponentenweise definierten Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ ist ein Vektorraum. Welche der Eigenschaften A1-A4, S1-S4 gelten auch dann, wenn die skalare Multiplikation durch $\lambda\,\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ definiert wird? Welche der Eigenschaften werden verletzt?

[1]Die Elemente von $\mathbb{R}$ haben im Zusammenhang mit einem Vektorraum die Funktion von Skalaren. Es gibt auch Vektorräume über anderen Körpern, z. B. über dem Körper der komplexen Zahlen, die wir hier allerdings nicht betrachten.

Untervektorräume

Definition
Ist $(V,+,\cdot)$ ein Vektorraum und U eine nicht leere Teilmenge von V, die bezüglich der in V definierten Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ selbst ein Vektorraum ist, so heißt U *Unterraum* von V.

Bemerkungen:

- In der Literatur werden für Untervektorräume unterschiedliche Bezeichnungen wie *linearer Unterraum*, *Teilvektorraum* und *linearer Teilraum* verwendet. Wir nutzen die kurze Bezeichnung *Unterraum*.
- Jeder Vektorraum V besitzt zwei Teilmengen, bei denen sofort klar ist, dass es sich um Unterräume handelt. Dabei handelt es sich um V selbst und um die Teilmenge, die nur den Nullvektor von V enthält. Man nennt diese Unterräume *triviale Unterräume*.

Unterraumkriterium

Um für eine Menge M mit zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ zu überprüfen, ob es sich um einen Vektorraum handelt, muss die Abgeschlossenheit der Menge bezüglich der beiden Verknüpfungen untersucht und es muss geprüft werden, ob die acht Punkte A1-S4 der Definition erfüllt sind. Derselbe Aufwand ist zu betreiben, wenn nach Definition entschieden werden soll, ob eine Menge ein Unterraum eines Vektorraumes ist. Viele der in der Definition geforderten Eigenschaften sind für eine Menge jedoch schon dadurch erfüllt, dass es sich um eine Teilmenge eines Vektorraumes handelt, so dass bereits wenige Bedingungen genügen, um zu überprüfen, ob eine Teilmenge eines Vektorraumes ein Unterraum ist. Diese Bedingungen sind in dem folgenden Unterraumkriterium zusammengefasst.

Satz:
Es seien $(V,+,\cdot)$ ein Vektorraum und U eine nicht leere Teilmenge von V. U ist genau dann ein Unterraum von V, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

U1. U ist abgeschlossen bezüglich der Vektoraddition in V, d. h. für beliebige $\vec{u},\vec{v}\in U$ ist auch $\vec{u}+\vec{v}\in U$.

U2. U ist abgeschlossen bezüglich der skalaren Multiplikation in V, d. h. für beliebige $\vec{u}\in U$, $\lambda\in\mathbb{R}$ ist $\lambda\cdot\vec{u}\in U$.

Beweis:

- Ist U ein Unterraum von V, so gelten die Bedingungen U1 und U2 wegen der Abgeschlossenheit von V bezüglich $+$ und $\cdot$, siehe die entsprechende Bemerkung zu Definition des Vektorraumes.
- Es sei umgekehrt $U\subset V$, $U\neq\{\}$, und es seien die Bedingungen U1 und U2 erfüllt. Zu zeigen ist, dass $(U,+,\cdot)$ die Bedingungen A1-S4 der Definition erfüllt. Für die Rechenregeln A1, A2 und S1-S4 ist dies dadurch gegeben, dass U eine Teilmenge von V ist und dieselben Verknüpfungen angewendet werden; somit gelten diese Rechenregeln natürlich für alle Vektoren von U, da diese auch Vektoren von V sind. Es ist also nur noch zu zeigen, dass A3 und A4 in U erfüllt sind.

  A3. Nach der Voraussetzung $U\neq\{\}$ existiert ein Vektor $\vec{u}\in U$, und wegen U2 gilt $\lambda\cdot\vec{u}\in U$ für beliebige $\lambda\in\mathbb{R}$. Mit $\lambda=0$ ist also $0\cdot\vec{u}\in U$. Es gilt $0\cdot\vec{u}=\vec{o}$ und somit $\vec{o}\in U$.

  A4. Es sei $\vec{u}$ ein beliebiger Vektor von U. Dann ist nach U2 auch $(-1)\cdot\vec{u}\in U$.
  Es gilt $(-1)\cdot\vec{u}=-(1\cdot\vec{u})=-\vec{u}$, also ist $-\vec{u}\in U$.

Der Durchschnitt und die Summe zweier Unterräume

Satz:
Sind U_1, U_2 Unterräume eines Vektorraumes V, so ist auch der Durchschnitt $U_1\cap U_2$ ein Unterraum von V.

Beweis:
Da jeder Unterraum den Nullvektor enthält, ist $U_1\cap U_2$ nicht leer. Es bleiben die Bedingungen U1, U2 des Unterraumkriteriums zu bestätigen. Dazu seien $v,w\in U_1\cap U_2$ und $\lambda\in\mathbb{R}$. Da somit $v,w\in U_1$ sind, folgt durch Anwendung von U1 und U2 für U_1, dass $v+w\in U_1$ und $\lambda v\in U_1$ ist. Ebenso gilt $v+w\in U_2$ und $\lambda v\in U_2$. Es ergibt sich also $v+w\in U_1\cap U_2$ sowie $\lambda v\in U_1\cap U_2$.

Beispiel:
Die Lösungsmengen der einzelnen Gleichungen des homogenen LGS

$$\begin{array}{cr} \mathrm{I} & 3x-2y+4z=0\\ \mathrm{II} & x+\ \ y-3z=0 \end{array}$$

sind Unterräume von $\mathbb{R}^3$:

$$L_{\mathrm{I}}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\,\middle|\,\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}-4\\0\\3\end{pmatrix};\ \lambda,t\in\mathbb{R}\right\},$$

$$L_{\mathrm{II}}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\,\middle|\,\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\lambda\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix};\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}\right\}.$$

Berechnet man durch Gleichsetzen dieser Parameterdarstellungen den Durchschnitt der beiden Unterräume, so ergibt sich der Unterraum

$$L_{\mathrm{I}} \cap L_{\mathrm{II}} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix} ;\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dieser Unterraum ist die Lösungsmenge des gegebenen Gleichungssystems. Geometrisch lassen sich Lösungsmengen homogener Gleichungen mit drei Variablen als Ebenen interpretieren, die durch den Koordinatenursprung verlaufen. Der Durchschnitt zweier derartiger Ebenen ist (wenn diese nicht identisch sind) eine Ursprungsgerade.

Bemerkung: Die *Vereinigungsmenge* $U_1 \cup U_2$ zweier Unterräume U_1 und U_2 eines Vektorraumes ist i. Allg. kein Unterraum, siehe Aufgabe 5.

Definition
Es seien U_1, U_2 Unterräume eines Vektorraumes V. Dann heißt die Menge

$$U_1 + U_2 := \{ \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \mid \vec{u}_1 \in U_1,\ \vec{u}_2 \in U_2 \}$$

Summe der Unterräume U_1 und U_2.

Beispiel:
Wir betrachten zwei Unterräume von $\mathbb{R}^3$:

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, r \in \mathbb{R} \right\}, \quad U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, s \in \mathbb{R} \right\},$$

Die Summe dieser beiden Unterräume ist

$$U_1 + U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, r, s \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ s \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, r, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Satz:
Sind U_1, U_2 Unterräume eines Vektorraumes V, so ist die Summe $U_1 + U_2$ ebenfalls ein Unterraum von V.

Beweis:
Es ist klar, dass $U_1 + U_2$ nicht die leere Menge ist, somit bleiben für $U_1 + U_2$ die Bedingungen U1 und U2 des Unterraumkriteriums zu bestätigen. Dazu seien $\vec{v}, \vec{w} \in U_1 + U_2$, d. h. es existieren $\vec{v}_1, \vec{w}_1 \in U_1$ und $\vec{v}_2, \vec{w}_2 \in U_2$ mit

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \quad \vec{w} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2 .$$

Wegen der Assoziativität und der Kommutativität der Vektoraddition folgt

$$\vec{v} + \vec{w} = (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + (\vec{w}_1 + \vec{w}_2) = (\vec{v}_1 + \vec{w}_1) + (\vec{v}_2 + \vec{w}_2) \in U_1 + U_2 .$$

Ist $\lambda \in \mathbb{R}$, so gilt

$$\lambda \vec{v} = \lambda (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \lambda \vec{v}_1 + \lambda \vec{v}_2 \in U_1 + U_2.$$

Damit sind die Bedingungen U1, U2 erfüllt; $U_1 + U_2$ ist somit ein Unterraum.

Aufgaben

1. Gegeben sind ein Unterraum U eines Vektorraumes V und Vektoren $\vec{u}, \vec{v} \in V$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?
   a) Gehören $\vec{u}$ und $\vec{v}$ nicht zu U, so ist auch $\vec{u} + \vec{v} \notin U$.
   b) Gehören $\vec{u}$ und $\vec{v}$ nicht zu U, so ist $\vec{u} + \vec{v} \in U$.
   c) Gehört $\vec{u}$ zu U, nicht aber $\vec{v}$, so ist $\vec{u} + \vec{v} \notin U$.

   Geben Sie Begründungen oder Gegenbeispiele an.

2. Geben Sie zu folgenden Teilmengen des Vektorraumes $\mathbb{R}^3$ an, ob sie Unterräume sind; begründen Sie Ihre Aussagen:

   a) $U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, v_1 + v_2 = 2 \right\}$ b) $U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, v_1 + v_2 = v_3 \right\}$

   c) $U_3 = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, v_1 \cdot v_2 = v_3 \right\}$

3. Begründen Sie, dass Lösungsmengen inhomogener linearer Gleichungssysteme keine Unterräume sind.

4. Zeigen Sie, dass die Menge aller 2×2-Matrizen der Form $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ mit den komponentenweise definierten Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ ein Unterraum des Vektorraumes aller Matrizen $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ mit zwei Zeilen und zwei Spalten ist.

5. Zeigen Sie, dass die Vereinigungsmenge $U_1 \cup U_2$ zweier Unterräume U_1 und U_2 eines Vektorraumes im Allgemeinen kein Unterraum ist.