Linearkombinationen, lineare Hüllen, Erzeugendensysteme, lineare Abhängigkeit

Linearkombinationen

Sind zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ gegeben, so lassen sich weitere Vektoren $\vec{x}$ aus diesen durch Multiplikation mit reellen Zahlen und anschließende Addition erzeugen:

$$\vec{x} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}.$$

Dieses als Linearkombination bezeichnete Prinzip der Bildung von Vektoren aus gegebenen Vektoren lässt sich für beliebig viele Vektoren verallgemeinern.

Definition:
Als *Linearkombination* der Vektoren $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k$ bezeichnet man einen Vektor $\vec{x}$ mit

$$\vec{x} \;=\; \lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \cdots + \lambda_k \cdot \vec{u}_k \;=\; \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot \vec{u}_i \qquad (\text{mit } \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}).$$

Bemerkung: Da $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ beliebige reelle Zahlen sein können, gibt es zu jeder Menge von Vektoren, die nicht leer ist und nicht nur aus dem Nullvektor besteht, unendlich viele Linearkombinationen.

Lineare Hüllen von Vektormengen

Definition:
Als *lineare Hülle* von Vektoren $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k$ bezeichnet man die Menge aller Linearkombinationen dieser Vektoren:

$$\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k \rangle \;=\; \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot \vec{u}_i \;\middle|\; \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R} \right\}.$$

Beispiel: Die lineare Hülle der Vektoren $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$ ist die Menge

$$\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle \;=\; \left\{ \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Satz:
Es seien $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k$ Vektoren eines VR V. Dann ist die lineare Hülle $\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k \rangle$ ein Unterraum von V.

Satz:
Es seien $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k$ Vektoren eines Vektorraumes V. Dann ist die lineare Hülle $\langle \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k \rangle$ der kleinste Unterraum von V, der $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k$ enthält, d. h.: Ist U ein beliebiger Unterraum von V mit $\vec{u}_1 \in U, \ldots, \vec{u}_k \in U$, so gilt $\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k \rangle \subseteq U$.

Erzeugendensysteme

Definition:
Eine Teilmenge E eines Vektorraumes V heißt *Erzeugendensystem* von V, wenn sich jeder Vektor $\vec{v} \in V$ als Linearkombination von Vektoren aus E darstellen lässt.

Satz:
Es sei $E = \{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \ldots; \vec{e}_k\}$ ein Erzeugendensystem eines Vektorraumes V.

a) Sind zwei Vektoren $\vec{e}_i, \vec{e}_j \in E$ $(i \neq j)$ kollinear und ist $\vec{e}_i \neq \vec{o}$, so ist auch $E \setminus \{\vec{e}_j\} \;=\; \{\vec{e}_1; \ldots; \vec{e}_{j-1}; \vec{e}_{j+1}; \ldots; \vec{e}_k\}$ ein Erzeugendensystem von V.

b) Sind drei Vektoren $\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_l \in E$ $(i \neq j, i \neq l, j \neq l)$ komplanar und sind $\vec{e}_i$ und $\vec{e}_j$ nicht kollinear, so ist auch $E \setminus \{\vec{e}_l\} \;=\; \{\vec{e}_1; \ldots; \vec{e}_{l-1}; \vec{e}_{l+1}; \ldots; \vec{e}_k\}$ ein Erzeugendensystem von V.

Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit

Definition:
Eine Menge $\{\vec{u}_1; \vec{u}_2; \ldots; \vec{u}_k\}$ von Vektoren eines Vektorraumes V heißt *linear abhängig*, wenn sich der Nullvektor auf nicht triviale Weise als Linearkombination der Vektoren $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k$ darstellen lässt, d. h. wenn $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ existieren, von denen für mindestens ein i (mit $1 \leq i \leq k$) $\lambda_i \neq 0$ ist, so dass gilt:

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \, \vec{u}_i = \vec{o}\,.$$

Eine Vektormenge $\{\vec{u}_1; \vec{u}_2; \ldots; \vec{u}_k\}$ heißt *linear unabhängig*, wenn sich der Nullvektor nur auf triviale Weise als LK der Vektoren $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k$ darstellen lässt, d. h. wenn aus $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \, \vec{u}_i = \vec{o}$ folgt $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$.

Satz:
Enthält eine Menge M von Vektoren den Nullvektor, so ist M linear abhängig.

Wir merken an, dass insbesondere die Menge $M = \{\vec{o}\}$, die nur aus dem Nullvektor besteht, trivialerweise linear abhängig ist.

Satz:

a) Für eine beliebige linear unabhängige Menge M von Vektoren ist jede Teilmenge $N \subset M$ ebenfalls linear unabhängig.

b) Sind M und N Mengen von Vektoren mit $M \subset N$ und ist M linear abhängig, so ist N ebenfalls linear abhängig.

Bemerkungen:

- Wenn sich ein Vektor $\vec{x}$ als Linearkombination von Vektoren $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k$ darstellen lässt, sagt man, der Vektor $\vec{x}$ *ist von den Vektoren* $\vec{u}_1 \ldots, \vec{u}_k$ *linear abhängig*. Ist dies nicht der Fall, so ist $\vec{x}$ *von den Vektoren* $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k$ *linear unabhängig*. Es gilt also: *Eine Menge M von Vektoren ist genau dann linear abhängig, wenn ein Vektor in M existiert, der von den restlichen Vektoren von M linear abhängig ist.*
- Die Formulierung „wenn ein Vektor in M existiert, der sich als Linearkombination der restlichen Vektoren von M darstellen lässt" beinhaltet nicht, dass *nur* ein Vektor mit dieser Eigenschaft existieren muss. Meist ist sogar die Mehrzahl der Vektoren einer linear abhängigen Vektormenge von den jeweils verbleibenden Vektoren linear abhängig. Genauer ausgedrückt lassen sich alle Vektoren $\vec{u}_i$, deren Koeffizienten λ_i bei der Darstellung $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{u}_i = \vec{o}$ von Null verschieden sind, als Linearkombinationen der jeweils restlichen Vektoren darstellen. Dies wird in dem ersten Teil des Beweises von Satz **??** deutlich: $\vec{u}_l$ kann jeder Vektor sein, für den $\lambda_l \neq 0$ ist.

Satz:
Es seien $M = \{\vec{u}_1; \ldots; \vec{u}_k\}$ eine linear unabhängige Menge von Vektoren eines Vektorraumes V und $\vec{v}$ ein beliebiger Vektor aus V. Dann folgt aus

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{u}_i \quad \textit{und} \quad \vec{v} = \sum_{i=1}^{k} \mu_i \vec{u}_i$$

stets $\lambda_i = \mu_i$ für alle i mit $1 \leq i \leq k$.

Bemerkung: Der Satz sagt aus, dass die Koeffizienten bei der *Darstellung eines Vektors als Linearkombination einer Menge linear unabhängiger Vektoren eindeutig* bestimmt sind.

Aufgaben

1. Überprüfen Sie, ob die folgenden 2×2-Matrizen als Linearkombinationen der Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ darstellbar sind: a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

2. Zeigen Sie, dass die Vektormenge $E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$ ist.

3. Weisen Sie nach: Sind U und V lineare Unterräume sowie $E_U = \{\vec{u}_1; \ldots; \vec{u}_k\}$ und $E_V = \{\vec{v}_1; \ldots; \vec{v}_m\}$ Erzeugendensysteme von U bzw. V, so ist die Summe der Unterräume U und V identisch mit der linearen Hülle der Vektormenge $E_U \cup E_V$, d. h. $U + V = \langle \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m \rangle$.

4. Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ linear abhängig sind und überprüfen Sie, welche(r) der Vektoren sich als Linearkombination der jeweils drei anderen Vektoren darstellen lässt/lassen.

5. Folgt aus der linearen Unabhängigkeit von zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ auch die lineare Unabhängigkeit von $\vec{u} - \vec{v}$ und $\vec{u} + \vec{v}$?

6. Folgt aus der linearen Unabhängigkeit dreier Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ auch die lineare Unabhängigkeit der drei Vektoren $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$, $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{v} + \vec{w}$?

7. Gegeben sind die folgenden Unterräume von $\mathbb{R}^2$: $U_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$, $U_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$, $U_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle$.
Welche der folgenden Aussagen ist (sind) richtig?
   a) $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$ ist ein Erzeugendensystem von $U_1 \cap U_2$.
   b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ ist eine linear unabhängige Teilmenge von U_2.
   c) Es gilt $\langle U_1 \cup U_3 \rangle = \mathbb{R}^2$.

8. Beweisen Sie den folgenden Satz: Ist eine Vektormenge $\{\vec{u}_1; \ldots; \vec{u}_k\}$ linear unabhängig und ist ein Vektor $\vec{v}$ von $\{\vec{u}_1; \ldots; \vec{u}_k\}$ linear unabhängig, so ist auch die Menge $\{\vec{u}_1; \ldots; \vec{u}_k; \vec{v}\}$ linear unabhängig.