Basis und Dimension

Der Begriff der Basis

Definition: Eine Menge $B = \{\vec{b}_1; \vec{b}_2; \ldots; \vec{b}_n\}$ von Vektoren eines Vektorraumes V heißt *Basis* von V, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

- B ist ein Erzeugendensystem von V,
- B ist linear unabhängig.

Beispiele:

- Die bekannteste Basis von $\mathbb{R}^3$ ist die *Standardbasis* bzw. *kanonische Basis* $B_0 = \{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\}$ mit $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, welche die Richtungen der Achsen eines kartesischen Koordinatensystems beschreiben.
- Neben der Standardbasis gibt es unendlich viele weitere Basen von $\mathbb{R}^3$. Als weiteres Beispiel einer Basis von $\mathbb{R}^3$ sei $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ angeführt.

Koordinaten von Vektoren bezüglich Basen

Definition: Ist $B = \{\vec{b}_1; \vec{b}_2; \ldots; \vec{b}_n\}$ eine Basis eines Vektorraumes V und $\vec{u}$ ein beliebiger Vektor aus V mit

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{b}_i \,,$$

so heißen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ *Koordinaten des Vektors $\vec{u}$ bezüglich der Basis B.*

Es wurde bereits nachgewiesen, dass die Darstellung eines Vektors als Linearkombination einer linear unabhängigen Vektormenge *eindeutig* ist. Da eine Basis $B = \{\vec{b}_1; \vec{b}_2; \ldots; \vec{b}_n\}$ eines Vektorraumes V zugleich ein Erzeugendensystem ist, *existiert* zudem für jeden Vektor $\vec{u} \in V$ eine Darstellung der Form $\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{b}_i$. Somit gilt also der folgende Satz.

Satz: Ist B eine Basis eines Vektorraumes V, so sind jedem Vektor $\vec{u} \in V$ eindeutig Koordinaten bzgl. B zugeordnet.

Beispiel: Es werden die Koordinaten des Vektors $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ bestimmt. Dazu ist die Vektorgleichung

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

zu lösen. Man erhält als Lösung $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = -11$, $\lambda_3 = 6$; also hat $\vec{u}$ bezüglich B die Koordinaten $(9; -11; 6)$.

Beispiel: Lösungsmengen homogener linearer Gleichungssysteme in n Variablen sind Unterräume von R^n. Basen dieser Unterräume erhält man durch Lösen der LGS.

- Das aus nur einer Gleichung bestehende LGS $-3\,x + \frac{3}{2}\,y - 5\,z = 0$ hat die Lösungsmenge
$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix};\ s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$
Die Vektormenge $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ erzeugt somit den Unterraum (von $\mathbb{R}^3$) der Lösungen der gegebenen Gleichung. Da B zudem offensichtlich linear unabhängig ist, handelt es sich um eine Basis dieses Unterraumes.
- Bestimmt man die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems
$$\begin{aligned} 2\,x_1 + 7\,x_2 + 9\,x_3 + x_4 &= 0 \\ 4\,x_1 + 14\,x_2 + 8\,x_3 + 3\,x_4 &= 0 \\ x_1 + 3\,x_2 + 5\,x_3 - 3\,x_4 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{bzw.} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 9 & 1 & 0 \\ 4 & 14 & 8 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & -3 & 0 \end{array} \right),$$
so erhält man
$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 232 \\ -69 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R} \right\}.$$
Eine Basis des Unterraumes (von $\mathbb{R}^4$) der Lösungen des gegebenen LGS ist also $B = \left\{ \begin{pmatrix} 232 \\ -69 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} \right\}$.

Sätze über Basen von Vektorräumen

Satz: Eine Teilmenge $B = \{\vec{b}_1; \ldots; \vec{b}_n\}$ eines Vektorraumes V ist genau dann eine Basis von V, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- B ist ein Erzeugendensystem von V.
- Es existiert keine echte Teilmenge von B, die Erzeugendensystem von V ist.

Bemerkung: Der Satz sagt aus, dass jede Basis ein „minimales“ Erzeugendensystem ist.

Verkürzungssatz: Es sei V ein Vektorraum und $E_m = \{\vec{e}_1; \ldots; \vec{e}_m\}$ ein Erzeugendensystem von V. Dann ist entweder E eine Basis von V oder es existiert eine echte Teilmenge $B \subset E$, die eine Basis von V ist.

Satz:
Eine Teilmenge $B = \{\vec{b}_1; \ldots; \vec{b}_n\}$ eines Vektorraumes V ist genau dann eine Basis von V, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- B ist eine linear unabhängige Teilmenge von V.
- Jede Menge $B' \subseteq V$, die B als echte Teilmenge enthält (für die also $B \subset B'$ gilt) ist linear abhängig.

Bemerkung: Der Satz sagt aus, dass jede Basis ein „maximales“ System linear unabhängiger Vektoren ist.

Basisergänzungssatz: Es seien V ein VR, $U = \{\vec{u}_1; \ldots; \vec{u}_k\}$ eine linear unabh. Teilmenge und $E = \{\vec{e}_1; \ldots; \vec{e}_l\}$ ein Erzeugendensystem von V. Dann lässt sich U durch Elemente von E zu einer Basis von V ergänzen.

Satz: Es seien $B = \{\vec{b}_1; \ldots; \vec{b}_n\}$ eine Basis und $U = \{\vec{u}_1; \ldots; \vec{u}_k\}$ eine linear unabhängige Teilmenge eines Vektorraumes V. Dann gilt $k \leq n$.

Beweis:
Da B eine Basis ist, existieren $\lambda_{ij} \in \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n)$ mit

$$(*) \qquad \begin{array}{rcccl} \vec{u}_1 & = & \sum_{j=1}^n \lambda_{1j}\,\vec{b}_j & = & \lambda_{11}\,\vec{b}_1 + \cdots + \lambda_{1n}\,\vec{b}_n \\ \vec{u}_2 & = & \sum_{j=1}^n \lambda_{2j}\,\vec{b}_j & = & \lambda_{21}\,\vec{b}_1 + \cdots + \lambda_{2n}\,\vec{b}_n \\ \vdots & & \vdots & = & \vdots \\ \vec{u}_k & = & \sum_{j=1}^n \lambda_{kj}\,\vec{b}_j & = & \lambda_{k1}\,\vec{b}_1 + \cdots + \lambda_{kn}\,\vec{b}_n\,. \end{array}$$

Nach Voraussetzung ist $U = \{\vec{u}_1; \ldots; \vec{u}_k\}$ linear unabhängig, die Vektorgleichung

$$(**) \qquad \mu_1\,\vec{u}_1 + \mu_2\,\vec{u}_2 + \cdots + \mu_k\,\vec{u}_k = \vec{o}\,.$$

darf also nur die triviale Lösung $(\mu_1, \ldots, \mu_k) = (0, \ldots, 0)$ besitzen. Wir formen $(**)$ um und zeigen, dass daraus $k \leq n$ folgt. Einsetzen von $(*)$ in $(**)$ ergibt

$$\mu_1 \sum_{j=1}^n \lambda_{1j}\,\vec{b}_j + \cdots + \mu_k \sum_{j=1}^n \lambda_{kj}\,\vec{b}_j = \vec{o}$$

bzw. in ausführlicher Schreibweise und sortiert nach den Vektoren $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n$:

$$\begin{array}{cl} & (\mu_1\,\lambda_{11} + \mu_2\,\lambda_{21} + \ldots + \mu_k\,\lambda_{k1}) \cdot \vec{b}_1 \\ + & (\mu_1\,\lambda_{12} + \mu_2\,\lambda_{22} + \ldots + \mu_k\,\lambda_{k2}) \cdot \vec{b}_2 \\ \vdots & \qquad\qquad \vdots \\ + & (\mu_1\,\lambda_{1n} + \mu_2\,\lambda_{2n} + \ldots + \mu_k\,\lambda_{kn}) \cdot \vec{b}_n = \vec{o}\,. \end{array}$$

Da $B = \{\vec{b}_1; \ldots; \vec{b}_n\}$ eine Basis und damit linear unabhängig ist, ist diese Vektorgleichung genau dann erfüllt, wenn jeder der Koeffizienten von $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n$ Null ist. Diese Bedingung ist gleichbedeutend mit dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccc} \mu_1\,\lambda_{11} & + & \mu_2\,\lambda_{21} & + & \ldots & + & \mu_k\,\lambda_{k1} & = & 0 \\ \mu_1\,\lambda_{12} & + & \mu_2\,\lambda_{22} & + & \ldots & + & \mu_k\,\lambda_{k2} & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ \mu_1\,\lambda_{1n} & + & \mu_2\,\lambda_{2n} & + & \ldots & + & \mu_k\,\lambda_{kn} & = & 0\,. \end{array}$$

Dabei handelt es sich um ein homogenes LGS mit n Gleichungen und k Variablen $\mu_1, \ldots, \mu_k$ (die Koeffizienten λ_{ij} sind durch $(*)$ bestimmt). Nur wenn dieses LGS *eindeutig* lösbar ist, d. h. $(\mu_1, \ldots, \mu_k) = (0, \ldots, 0)$, ist wegen $(**)$ die Voraussetzung der linearen Unabhängigkeit von $U = \{\vec{u}_1; \ldots; \vec{u}_k\}$ erfüllt. Somit muss das LGS eine Lösungsmenge ohne Parameter besitzen. Da ein lineares Gleichungssystem in k Variablen mit dem Rang r der einfachen und der erweiterten Koeffizientenmatrix eine $k-r$-parametrige Lösungsmenge besitzt, muss $k-r = 0$ sein. Da zudem der Rang eines LGS stets kleiner oder gleich der Anzahl der Gleichungen ist, also $r \leq n$, gilt $k-n \leq 0$ und somit die Behauptung $k \leq n$. $\square$

Satz: Alle Basen eines Vektorraumes V bestehen aus gleich vielen Vektoren, d. h.:
sind $B_1 = \{\vec{b}_1; \ldots; \vec{b}_n\}$ und $B_2 = \{\vec{c}_1; \ldots; \vec{c}_m\}$ Basen von V, so ist $n = m$.

Folgerung: Ist $B = \{\vec{b}_1; \dots; \vec{b}_n\}$ eine Basis von V und $U = \{\vec{u}_1; \dots; \vec{u}_n\}$ eine linear unabhängige Teilmenge von V, die ebenso viele Elemente enthält wie B, so ist U ebenfalls eine Basis von V.

Zusammmenfassung: Die vorangegangenen Sätze stellen wesentliche Zusammenhänge zwischen Erzeugendensystemen, Mengen linear unabhängiger Vektoren und Basen endlich erzeugbarer Vektorräume her, die im Folgenden zusammengefasst werden.

- Jede Basis ist ein „minimales“ Erzeugendensystem eines Vektorraumes.
- Jedes Erzeugendensystem eines Vektorraumes lässt sich zu einer Basis reduzieren.
- Jede Basis ist ein „maximales“ System linear unabhängiger Vektoren.
- Jedes System linear unabhängiger Vektoren lässt sich zu einer Basis erweitern.
- Jede Basis eines endlich erzeugbaren Vektorraumes besteht aus gleich vielen Vektoren wie jede andere Basis dieses Vektorraumes.

Aufgaben

1. Zeigen Sie, dass $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.
2. Zeigen Sie, dass $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^4$ ist.
3. Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors $\vec{x}$ bezüglich der Basis B.

   $\vec{x} = \begin{pmatrix} 19 \\ 5 \\ -17 \end{pmatrix}; \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$
4. Bestimmen Sie eine Basis des von der Menge $X = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ erzeugten Unterraumes $U = \langle X \rangle$ von $\mathbb{R}^4$.
5. Geben Sie Basen der folgenden Unterräume von $\mathbb{R}^3$ bzw. von $\mathbb{R}^4$ an:

   a) $U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x = z \right\}$ b) $U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x_1 + 3x_2 + 2x_4 = 0\,;\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$
6. Beweisen Sie den Basisergänzungssatz.

Der Steinitzsche Austauschsatz

Häufig ist es z. B. bei Beweisführungen nötig, Vektoren einer Basis gegen andere Vektoren auszutauschen. Wir zeigen mit dem folgenden Satz zunächst, dass sich einzelne Vektoren einer Basis austauschen lassen und in Verallgemeinerung dessen dann, dass der Austausch beliebiger Teilmengen von Basen gegen Mengen linear unabhängiger Vektoren möglich ist (Steinitzscher Austauschsatz).

Satz: Es seien V ein Vektorraum, $B = \{\vec{b}_1; \dots; \vec{b}_n\}$ eine Basis von V und $\vec{b} \in V$ ein Vektor mit $\vec{b} = \sum_{j=1}^{n} \mu_j \vec{b}_j$. Falls $\mu_k \neq 0$ ist (für ein $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$), so ist auch die Menge $B' = \{\vec{b}_1; \dots; \vec{b}_{k-1}; \vec{b}; \vec{b}_{k+1}; \dots, \vec{b}_n\}$ eine Basis von V.

Beweis: Übungsaufgabe

Austauschsatz von Steinitz:
Es seien V ein Vektorraum, $B = \{\vec{b}_1; \dots; \vec{b}_n\}$ eine Basis und $U = \{\vec{u}_1; \dots; \vec{u}_k\}$ eine linear unabhängige Teilmenge von V. Dann lassen sich k Vektoren von B gegen die Vektoren $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$ so austauschen, dass die entstehende Menge auch eine Basis ist, d. h. bei geeigneter Nummerierung der Vektoren $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ ist $B' = \{\vec{u}_1; \dots; \vec{u}_k, \vec{b}_{k+1}; \dots; \vec{b}_n\}$ eine Basis von V.

Beweis: Wegen eines Satzes auf S. 7 ist $k \leq n$. Im Falle $k = n$ müssen zu U keine Vektoren von B hinzugefügt werden, denn U ist nach der Folgerung auf S. 7 bereits eine Basis, also $B' = U$. Für alle $k < n$ beweisen wir den Satz mittels vollständiger Induktion.

Induktionsanfang: Für $k = 1$ gilt der Satz unmittelbar wegen des vorherigen Satzes.

Induktionsvoraussetzung: Ist $U_{k-1} = \{\vec{u}_1; \dots; \vec{u}_{k-1}\} \subset V$ linear unabhängig, so ist bei geeigneter Nummerierung der Vektoren $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ die Menge $B' = \{\vec{u}_1; \dots; \vec{u}_{k-1}, \vec{b}_k; \dots; \vec{b}_n\}$ eine Basis von V.

Induktionsbehauptung: Ist $U_k = \{\vec{u}_1; \dots; \vec{u}_k\}$ linear unabhängig, so ist bei geeigneter Nummerierung $B'' = \{\vec{u}_1; \dots; \vec{u}_k, \vec{b}_{k+1}; \dots; \vec{b}_n\}$ eine Basis von V.

Induktionsbeweis: Ist $U_k = \{\vec{u}_1; \dots; \vec{u}_k\}$ linear unabhängig, so ist wegen der Induktionsvoraussetzung $B' = \{\vec{u}_1; \dots; \vec{u}_{k-1}, \vec{b}_k; \dots; \vec{b}_n\}$ eine Basis von V.

Es muss also nur noch einer der Vektoren $\vec{b}_k, \ldots, \vec{b}_n$ durch $\vec{u}_k$ ersetzt werden. Um den vorherigen Satz dafür anzuwenden, ist zu zeigen, dass in der Darstellung $\vec{u}_k = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i \vec{u}_i + \sum_{i=k}^{n} \lambda_i \vec{b}_i$ durch die Basisvektoren von B' einer der Koeffizienten $\lambda_k, \ldots, \lambda_n$ von Null verschieden ist. Dies ist der Fall, da $\vec{u}_k$ als Element einer linear unabhängigen Vektormenge nicht der Nullvektor sein kann und zudem wegen der linearen Unabhängigkeit von U_k der Vektor $\vec{u}_k$ keine Linearkombination von $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{k-1}$ ist. Wegen des vorherigen Satzes kann somit bei geeigneter Nummerierung $\vec{b}_k$ gegen $\vec{u}_k$ ausgetauscht werden, und $B'' = \{\vec{u}_1; \ldots; \vec{u}_k, \vec{b}_{k+1}; \ldots; \vec{b}_n\}$ ist eine Basis von V. □

Der Begriff der Dimension

Definition: Ist V ein Vektorraum mit einer endlichen Basis $B = \{\vec{b}_1; \ldots; \vec{b}_n\}$, so heißt die Anzahl der Basisvektoren *Dimension* von V:

$$\dim V = n\,.$$

Hat ein Vektorraum keine endliche Basis, so heißt er *unendlichdimensional*. Der Vektorraum $V = \{\vec{o}\}$, der nur den Nullvektor enthält, heißt *nulldimensional*.

Beispiele

- Die Dimension des Vektorraumes $\mathbb{R}^n$ ist n.
- Wegen der Verwandtschaft mit $\mathbb{R}^{n+1}$ ist die Dimension des Vektorraumes der Polynome höchstens n-ten Grades $n+1$.
- Der Unterraum der Lösungen eines homogenen linearen Gleichungssystems in n Variablen vom Rang r hat $n-r$ Basisvektoren, seine Dimension ist daher $n-r$.
- Der Vektorraum der 2×2-Matrizen hat die Dimension 4; allgemein hat der Vektorraum der $m\times n$-Matrizen die Dimension $m \cdot n$.
- Der Vektorraum aller *Folgen* (a_n) *reeller Zahlen* ist unendlichdimensional. Wäre seine Dimension nämlich endlich, so müsste eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ existieren, so dass der Vektorraum eine Basis $B = \{\vec{b}_1; \ldots; \vec{b}_k\}$ besitzt. Daher kann es dann keine Mengen linear unabhängiger Vektoren geben, die mehr als k Elemente enthalten. Jedoch gelingt es – wie groß k auch immer gewählt sein möge – mühelos, $k+1$ linear unabhängige Vektoren des Vektorraumes der reellen Zahlenfolgen anzugeben, nämlich die Zahlenfolgen:

$$(a_n)^{(1)} = (\underset{1}{1}; 0; 0; \ldots; 0; 0; 0; \ldots)\,, \ldots, \; (a_n)^{(2)} = (0; \underset{2}{1}; 0; \ldots; 0; 0; 0; \ldots)\,, \ldots,$$
$$(a_n)^{(k)} = (0; 0; 0; \ldots; \underset{k}{1}; 0; 0; \ldots)\,, \quad (a_n)^{(k+1)} = (0; 0; 0; \ldots; 0; \underset{k+1}{1}; 0; \ldots)\,.$$

  Somit gibt es also keine Begrenzung der Anzahl linear unabhängiger Vektoren und daher keine endliche Basis des Vektorraumes aller reellen Zahlenfolgen. Der Vektorraum ist daher unendlichdimensional.

Die Dimensionsformel für lineare Unterräume

Satz:
Es seien V ein Vektorraum und U_1, U_2 zwei Unterräume von V. Dann gilt die Dimensionsformel

$$\dim U_1 + \dim U_2 \;=\; \dim\,(U_1 \cap U_2) + \dim\,(U_1 + U_2)$$

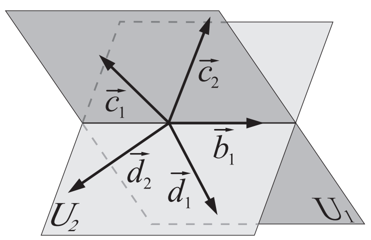

Abbildung 1: Dimensionsformel für lineare Unterräume

Die zweidimensionalen Unterräume U_1 und U_2 werden durch Ebenen dargestellt. Es ist in diesem Beispiel $\dim\,(U_1 \cap U_2) = 1$, $B_\cap = \{\vec{b}_1\}$, $B_1 = \{\vec{c}_1; \vec{c}_2\}$, $B_1' = \{\vec{b}_1; \vec{c}_2\}$ sowie $B_2 = \{\vec{d}_1; \vec{d}_2\}$, $B_2' = \{\vec{b}_1; \vec{d}_2\}$.