Übungsaufgaben zur Vorlesung

Algebra / Zahlentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Keine Abgabe

Besprechung in den verbleibenden Übungen

Probeklausur

Aufgabe 1 (10 Punkte)

(a) Formulieren Sie die fünf Peano-Axiome zur Grundlegung der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$.

(b) Beweisen Sie unter Verwendung der Peano-Axiome sowie der Definition der Multiplikation natürlicher Zahlen die folgende Aussage: Sind $a, b \in \mathbb{N}$ mit $a \cdot b = 1$, dann gilt $a = b = 1$.

(c) Geben Sie die Konstruktion von $(\mathbb{Z}, +)$ mit Hilfe der kommutativen regulären Halbgruppe $(\mathbb{N}, +)$ als Menge (also nicht als Gruppe) an. Beweisen Sie dabei insbesondere, dass die der Konstruktion zugrunde liegende Relation eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

(a) Formulieren Sie den Fundamentalsatz der elementaren Zahlentheorie für den Ring der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$.

(b) Beweisen Sie ohne Verwendung des Fundamentalsatzes der elementaren Zahlentheorie, dass jede natürliche Zahl $a > 1$ mindestens einen Primteiler $p \in \mathbb{P}$ besitzt.
Hinweis: Verwenden Sie dazu das Prinzip des kleinsten Elements.

(c) Entscheiden Sie, ob die natürliche Zahl $2^{2^{10\,001}} - 1$ eine Primzahl ist. Begründen Sie.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

(a) Definieren Sie die Begriffe „Halbgruppe“, „Monoid“ sowie „Gruppe“. Mit Ausnahme des Mengen- und des Abbildungsbegriffs sind die dabei neu auftretenden Begriffe zu erklären.

(b) Beweisen Sie, dass in einem Monoid das neutrale Element eindeutig bestimmt ist.

(c) Geben Sie zwei Gruppen der Ordnung 4 mit zugehörigen Gruppentafeln an, welche nicht zueinander isomorph sind.
Gibt es weitere Isomorphietypen für Gruppen der Ordnung 4? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler $d := (-22, 107)$ mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus.

(b) Stellen Sie den größten gemeinsamen Teiler d mit Hilfe des erweiterten Euklidischen Algorithmus als ganzzahlige Linearkombination $d = -22 \cdot x + 107 \cdot y$ dar, indem Sie die ganzen Zahlen x, y explizit bestimmen.

(c) Betrachten Sie den Ring $(\mathcal{R}_{107}, \oplus, \odot)$ und bestimmen Sie explizit ein $x \in \mathcal{R}_{107}$, das der Gleichung $34 \odot x = 1$ genügt.

(d) Betrachten Sie den Ring $(\mathcal{R}_{23}, \oplus, \odot)$ und bestimmen Sie explizit ein $x \in \mathcal{R}_{23}$, das der Gleichung $x^{107} = 2$ genügt.

Aufgabe 5 (10 Punkte)

(a) Definieren Sie die Begriffe „Einheit“ und „Nullteiler“ eines kommutativen Rings $(R, +, \cdot)$ mit Einselement 1.

(b) Bestimmen Sie die Gruppe der Einheiten für die Ringe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ für $n = 5$ und $n = 8$. Sind diese Einheitengruppen zueinander isomorph? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Integritätsbereich. Zeigen Sie, dass $(R \setminus \{0\}, \cdot)$ eine reguläre Halbgruppe ist.

Aufgabe 6 (10 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass mindestens eine der reellen Zahlen $\pi + e$ oder $\pi \cdot e$ irrational ist.
Hinweis: Betrachten Sie das Polynom $X^2 - (\pi + e)X + \pi \cdot e \in \mathbb{R}[X]$.

(b) Gibt es irrationale Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so dass $\alpha + \beta$ rational ist? Begründen Sie Ihre Antwort.