Übungsaufgaben zur Vorlesung
Algebra und Funktionentheorie
Prof. Dr. Jürg Kramer

Keine Abgabe
Besprechung in den Übungen der letzten Vorlesungswoche

Probeklausur (60 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)
Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe.

(a) Wie ist die Ordnung von G definiert? Wie ist die Ordnung $\mathrm{ord}_G(g)$ eines Elements $g \in G$ definiert? Welcher Zusammenhang besteht zwischen den beiden Größen?

(b) Es sei $H \subseteq G$ eine nicht-leere endliche Teilmenge, die bezüglich der Verknüpfung „$\circ$“ abgeschlossen ist. Zeigen Sie, dass jedes Element $g \in H$ endliche Ordnung hat.

(c) Zeigen Sie, dass die Teilmenge H eine Untergruppe von G ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

(a) Wann heißt eine Gruppe auflösbar?

(b) Seien p, q Primzahlen mit $p > q$ und G eine Gruppe der Ordnung $p \cdot q$. Zeigen Sie, dass G eine p-Sylowuntergruppe besitzt, die Normalteiler von G ist.

(c) Ist die Gruppe G aus Teil (b) auflösbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3 (10 Punkte)
Es seien p eine Primzahl und $\zeta_p := \exp(2\pi i/p) \in \mathbb{C}$ eine primitive p-te Einheitswurzel.

(a) Zeigen Sie, dass das Minimalpolynom von ζ_p über $\mathbb{Q}$ gegeben ist durch

$$f(X) = \frac{X^p - 1}{X - 1} = X^{p-1} + X^{p-2} + \ldots + X + 1.$$

Hinweis: Um hierbei bekannte Irreduzibilitätskriterien anwenden zu können, empfiehlt es sich, Xdurch $X + 1$ zu ersetzen.

(b) Es sei E der Zerfällungsköper von $X^p - 2$ über $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass der Grad $[E : \mathbb{Q}]$ der Körpererweiterung $E/\mathbb{Q}$ gleich $p(p - 1)$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass das Polynom $X^p - 2$ über dem Körper $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ irreduzibel ist.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

(a) Berechnen Sie den Grad des Zerfällungskörpers E des Polynoms $g(X) = X^4 - 2X^2 - 3$ über $\mathbb{Q}$.

(b) Bestimmen Sie die Galois-Gruppe der Erweiterung $E/\mathbb{Q}$.

(c) Bestimmen Sie alle echten Zwischenkörper $\mathbb{Q} \subsetneq L \subsetneq E$. Welche davon sind Galoissch über $\mathbb{Q}$?

Aufgabe 5 (10 Punkte)

(a) Es seien $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f\colon D \longrightarrow \mathbb{C}$ eine komplexwertige Funktion der Form $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Unter welchen allgemeinen Bedingungen an die reellwertigen Funktionen $u = u(x, y)$ und $v = v(x, y)$ ist f holomorph in D ?

(b) Es seien n eine positive natürliche Zahl und a eine positive reelle Zahl. Zeigen Sie, dass jede holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, welche für alle $z \in \mathbb{C}$ die Ungleichung

$$|f(z)| \leq a|z|^n$$

erfüllt, ein Polynom ist.

Hinweis: Verwenden Sie die allgemeinen Cauchyschen Integralformeln.

Aufgabe 6 (10 Punkte)

(a) Formulieren Sie eine Variante des Cauchyschen Integralsatzes.

(b) Es sei $\gamma\colon [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$ ein einfach geschlossener und positiv orientierter Weg. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von γ alle Werte, die das Integral

$$I(\gamma) := \int_\gamma \frac{1}{z^2 + 1} \,\mathrm{d}z$$

annehmen kann.

Hinweis: Bestimmen Sie dazu alle möglichen Homotopieklassen der zur Diskussion stehenden Wege γ.