HU Berlin Wintersemester 2022/23

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Algebra und Funktionentheorie

Prof. Dr. Jürg Kramer

Abgabetermin: 09.01.2023 bis 09:00 Uhr auf Moodle

Bitte beachten:
Jede Aufgabe in separatem PDF abgeben.
Erste Seite in jedem PDF mit Namen und Matrikelnummern versehen.
Partnerabgabe ist erlaubt und wird empfohlen.

Serie 10 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Wir betrachten die Menge

$$\overline{\mathbb{Q}} \coloneqq \big\{\alpha \in \mathbb{C} \,\big|\, \alpha \text{ algebraisch über } \mathbb{Q}\big\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\overline{\mathbb{Q}}$ mit der von $\mathbb{C}$ induzierten Addition und Multiplikation ein Körper ist.

(b) Beweisen Sie unter Verwendung des Fundamentalsatzes der Algebra, dass $\overline{\mathbb{Q}}$ algebraisch abgeschlossen ist, d. h. dass die Nullstellen eines Polynoms positiven Grades in $\overline{\mathbb{Q}}[X]$ wieder in $\overline{\mathbb{Q}}$ liegen.

Hinweis: Verwenden Sie dazu das Ergebnis der Aufgabe 1 (a) aus Serie 9.

(c) Zeigen Sie, dass $\overline{\mathbb{Q}}$ eine algebraische, aber keine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}$ ist.

Den Körper $\overline{\mathbb{Q}}$ nennt man *algebraischen Abschluss von* $\overline{\mathbb{Q}}$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Welche der folgenden Körpererweiterungen sind normal?

(a) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ über $\mathbb{Q}$.

(b) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})$ über $\mathbb{Q}$.

(c) $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ über $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

(d) $\mathbb{F}_3[X]/(X^2+X-1)$ über $\mathbb{F}_3$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es seien E eine Galois-Erweiterung über dem Körper K und $G = \mathrm{Gal}(E/K)$ die zugehörige Galois-Gruppe. Wir betrachten die Mengen

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \{L \mid K \subseteq L \subseteq E \text{ Zwischenkörper}\}, \\ \mathcal{G} &= \{H \mid H \leq G \text{ Untergruppe}\}. \end{aligned}$$

Nach dem Hauptsatz der Galois-Theorie besteht eine bijektive Zuordnung $\varphi\colon \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{G}$, induziert durch die Zuordnung

$$\varphi(L) = G^L = \mathrm{Gal}(E/L) \qquad (L \in \mathcal{K}).$$

Es seien nun $L_1, L_2 \in \mathcal{K}$ und $H_j = \varphi(L_j) \in \mathcal{G}$ $(j = 1, 2)$. Beweisen Sie:

(a) Im Rahmen der obigen Korrespondenz besteht die Äquivalenz:
$L_1 \subseteq L_2 \quad \Longleftrightarrow \quad H_1 \supseteq H_2$.

(b) Bezeichnen wir mit $L_1 \cdot L_2$ das *Kompositum von* L_1 *mit* L_2, d. h. den kleinsten Unterkörper von E, der sowohl L_1 als auch L_2 umfasst, so gilt $\varphi(L_1 \cdot L_2) = H_1 \cap H_2$.

(c) Für $L \in \mathcal{K}$ und $\sigma \in G$ besteht die Gleichheit $\mathrm{Gal}(E/\sigma(L)) = \sigma \circ \mathrm{Gal}(E/L) \circ \sigma^{-1}$.