HU Berlin Sommersemester 2024

# Übungsaufgaben zur Vorlesung

# Algebra / Zahlentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 01.07.2024 bis 09:00 Uhr auf Moodle

**Bitte beachten:**
**Jede Aufgabe in separatem PDF abgeben.**
**Erste Seite in jedem PDF mit Namen und Matrikelnummern versehen.**
**Partnerabgabe ist erlaubt und wird empfohlen.**

## Serie 11 (30 Punkte)

### Aufgabe 1 (10 Punkte)

(a) Beweisen Sie, dass die Dezimalbruchentwicklung einer rationalen Zahl $\frac{a}{b}$ mit $b \neq \pm 1$ und $(a, b) = 1$ genau dann abbricht, wenn $b$ nur die Primteiler 2 oder 5 besitzt.

(b) In gewissen Kulturen werden Zahlen im Hexalsystem, also zur Basis 6, angegeben, da man so mit zwei Händen leicht die Zahlen von 0 bis 35 anzeigen kann (nämlich wie ?). Analog zur Dezimaldarstellung ist die Hexaldarstellung einer rationalen Zahl durch

$$\pm q_\ell \dots q_0, q_{-1} \dots q_{-k} \dots := \pm \sum_{j=-\ell}^{\infty} q_{-j} \cdot 6^{-j} \qquad \big(q_{-j} \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}\big)$$

gegeben. Äußern Sie eine Vermutung, wann genau eine rationale Zahl eine abbrechende Hexaldarstellung besitzt.

### Aufgabe 2 (10 Punkte)

(a) Weisen Sie nach, dass die Folgen $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\geq 0}$ und $\left(\frac{n}{2^n}\right)_{n\geq 0}$ rationale Nullfolgen sind.

(b) Zeigen Sie, dass die Folge $\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)_{n\geq 0}$ eine rationale Cauchyfolge ist.

### Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es sei $\mathfrak{n}$ das Ideal der rationalen Nullfolgen im kommutativen Ring der rationalen Cauchyfolgen $(M, +, \cdot\,)$. Wir erweitern die auf $\mathbb{Q}$ gegebene Relation „$<$“ auf die Menge $\mathbb{R} = M/\mathfrak{n}$ der reellen Zahlen, indem wir für zwei reelle Zahlen $\alpha = (a_n) + \mathfrak{n}$ und $\beta = (b_n) + \mathfrak{n}$ definieren:

$$\alpha < \beta \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, q \in \mathbb{Q},\ q > 0,\ N(q) \in \mathbb{N}\colon b_n - a_n > q,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n > N(q).$$

Zeigen Sie, dass diese Definition sinnvoll ist, d. h. unabhängig von der Wahl der die reellen Zahlen $\alpha$ bzw. $\beta$ repräsentierenden rationalen Cauchyfolgen $(a_n)$ bzw. $(b_n)$.