Übungsaufgaben zur Vorlesung
Algebra und Funktionentheorie

Prof. Dr. Jürg Kramer

Abgabetermin: 16.01.2023 bis 09:00 Uhr auf Moodle

Bitte beachten:
Jede Aufgabe in separatem PDF abgeben.
Erste Seite in jedem PDF mit Namen und Matrikelnummern versehen.
Partnerabgabe ist erlaubt und wird empfohlen.

Serie 11 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Wir betrachten das Polynom $p(X) \coloneqq X^2 + X + 2$ im Ring $\mathbb{F}_3[X]$.

(a) Zeigen Sie, dass $E \coloneqq \mathbb{F}_3[X]/\big(p(X)\big)$ eine endliche Körpererweiterung von $\mathbb{F}_3$ ist.

(b) Bestimmen Sie eine Basis von E als Vektorraum über $\mathbb{F}_3$. Geben Sie für alle Elemente von E ihre multiplikativen Inversen an.

(c) Mit dem Polynom $q(X) \coloneqq X^2 + 2X + 2$ betrachten weiter die endliche Körpererweiterung $F \coloneqq \mathbb{F}_3[X]/\big(q(X)\big)$ von $\mathbb{F}_3$. Bestimmen Sie einen Körperisomorphismus $\varphi\colon E \longrightarrow F$, der $\mathbb{F}_3$ elementweise fest lässt.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

(a) Wir betrachten die endliche Körpererweiterung $E \coloneqq \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$ über $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass E eine Galois-Erweiterung von $\mathbb{Q}$ ist und bestimmen Sie den Isomorphietyp der Galois-Gruppe $G \coloneqq \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$.

(b) Bestimmen Sie für jede Untergruppe $H \leq G$ die nach dem Hauptsatz der Galois-Theorie entsprechende Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subseteq L \subseteq E$. Für welche dieser Zwischenkörper L ist L eine Galois-Erweiterung von $\mathbb{Q}$?

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Die symmetrische Gruppe S_n wirkt auf dem Körper $K(X_1, \ldots, X_n)$ der rationalen Funktionen durch Vertauschung der Variablen $X_1, \ldots, X_n$, d. h. vermöge der Gleichung

$$\big(\sigma \bullet f\big)(X_1, \ldots, X_n) \coloneqq f\big(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)}\big) \qquad \big(\sigma \in S_n,\ f \in K(X_1, \ldots, X_n)\big).$$

Eine rationale Funktion $f \in K(X_1, \ldots, X_n)$ heißt *symmetrisch*, falls für alle $\sigma \in S_n$ die Beziehung $\sigma \bullet f = f$ gilt.

Für $k = 1, \ldots, n$ definieren wir die *k-te elementarsymmetrische Funktion* s_k durch

$$s_k(X_1, \ldots, X_n) \coloneqq \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_k \leq n} X_{j_1} \cdot X_{j_2} \cdot \ldots \cdot X_{j_k}\,,$$

d. h. für $k = 1$ und $k = n$ erhalten wir beispielsweise

$$s_1(X_1, \ldots, X_n) = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{und} \quad s_n(X_1, \ldots, X_n) = X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n.$$

Beweisen Sie, dass sich jede symmetrische rationale Funktion $f \in K(X_1, \ldots, X_n)$ als rationale Funktion in den elementarsymmetrischen Funktionen $s_1, \ldots, s_n$ über K ausdrücken lässt, d. h. es gibt eine rationale Funktion $g \in K(s_1, \ldots, s_n)$ derart, dass $f(X_1, \ldots, X_n) = g(s_1, \ldots, s_n)$ gilt.

Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall, in dem $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$ ein homogenes symmetrisches Polynom vom Grad d ist, und zeigen Sie, dass es ein Polynom $g \in K[s_1, \ldots, s_n]$ derart gibt, dass $f(X_1, \ldots, X_n) = g(s_1, \ldots, s_n)$ gilt. Wenden Sie dabei vollständige Induktion nach d an.