HU Berlin Sommersemester 2024

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Algebra / Zahlentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 08.07.2024 bis 09:00 Uhr auf Moodle

Bitte beachten:
Jede Aufgabe in separatem PDF abgeben.
Erste Seite in jedem PDF mit Namen und Matrikelnummern versehen.
Partnerabgabe ist erlaubt und wird empfohlen.

Serie 12 (20 + 10 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass keine rationale Zahl r mit $r^2 = 2$ existiert.

(b) Es sei $a_0 := 2$. Wir definieren dann für $n \in \mathbb{N}$ rekursiv $a_{n+1} := \frac{1}{2}\big(a_n + \frac{2}{a_n}\big) \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass die rationale Zahlenfolge (a_n) einen Grenzwert

$$\alpha = \lim_{n \to \infty} a_n \in \mathbb{R}$$

besitzt.

(c) Zeigen Sie, dass $\alpha^2 = 2$ gilt. Wir nennen $\alpha = \sqrt{2}$ die *Quadratwurzel von* 2.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

(a) Erklären Sie, wie man eine irrationale Zahl an Hand ihrer Dezimalbruchentwicklung erkennt.

(b) Ist die reelle Zahl

$$\lambda := \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!} = 0{,}110001000000000000000001 0\ldots$$

rational oder irrational? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3* (10 Punkte)

Eine nicht-leere Menge $\mathfrak{M} \subseteq \mathbb{R}$ heißt *nach oben beschränkt*, falls ein $\gamma \in \mathbb{R}$ derart existiert, dass für alle $\mu \in \mathfrak{M}$ die Beziehung $\mu \leq \gamma$ gilt. Die reelle Zahl γ nennt man *obere Schranke von* $\mathfrak{M}$.

Zeigen Sie mit Hilfe der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$, dass eine nicht-leere, nach oben beschränkte Menge $\mathfrak{M} \subseteq \mathbb{R}$ eine kleinste obere Schranke $\sigma \in \mathbb{R}$ besitzt. Die reelle Zahl σ nennt man das *Supremum von* $\mathfrak{M}$.