HU Berlin Wintersemester 2022/23

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Algebra und Funktionentheorie

Prof. Dr. Jürg Kramer

Abgabetermin: 30.01.2023 bis 09:00 Uhr auf Moodle

Bitte beachten:
Jede Aufgabe in separatem PDF abgeben.
Erste Seite in jedem PDF mit Namen und Matrikelnummern versehen.
Partnerabgabe ist erlaubt und wird empfohlen.

Serie 13 (30 + 10 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es seien $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f\colon D \longrightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Zeigen Sie:

(a) Gilt $f(D) \subseteq \mathbb{R}$, so ist f konstant.

(b) Sind der Realteil $u \coloneqq \mathrm{Re}(f)$ und der Imaginärteil $v \coloneqq \mathrm{Im}(f)$ von f zweimal stetig partiell differenzierbar nach x und y, so sind u und v sogenannte *harmonische Funktionen auf* D, d. h. es gilt

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u(x,y) = 0 \qquad \text{und} \qquad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) v(x,y) = 0$$

für alle $z = x + iy \in D$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es seien $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $[0,1]$ das Einheitsintervall. Eine stetig differenzierbare Abbildung $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow D$ wird als *glatter Weg* bezeichnet. Weiter sei $f\colon D \longrightarrow \mathbb{C}$ eine stetige komplexwertige Funktion. Dann ist das *Wegintegral von* f *entlang* γ bekanntlich definiert durch

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \coloneqq \int_0^1 f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{Re}\,\big(f(\gamma(t))\gamma'(t)\big)\mathrm{d}t + i\int_0^1 \mathrm{Im}\,\big(f(\gamma(t))\gamma'(t)\big)\mathrm{d}t.$$

Berechnen Sie die folgenden Wegintegrale:

(a) $\displaystyle\int_\gamma \overline{z}\,\mathrm{d}z$ für $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$, definiert durch $\gamma(t) \coloneqq (t+i)/(t-i)$.

(b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z$ für $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$, definiert durch $\gamma(t) \coloneqq \cos(2\pi t) + i\sin(2\pi t)$.

(c) $\displaystyle\int_\gamma |z|^2 \,\mathrm{d}z$ für $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$, definiert durch $\gamma(t) := r(\cos(2\pi t) + i\sin(2\pi t))$ $(r \in \mathbb{R}_{>0})$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)
Es seien $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow D$ ein rektifizierbarer Weg und $f\colon D \longrightarrow \mathbb{C}$ eine stetige komplexwertige Funktion. Beweisen Sie, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ und zu jedem $\delta > 0$ einen Polygonzug $\mathcal{P}$ in D mit Anfangspunkt $\gamma(0)$ und Endpunkt $\gamma(1)$ mit den drei folgenden Eigenschaften gibt:

(i) $\mathcal{P}$ hat alle seine Eckpunkte auf γ,

(ii) $\operatorname{dist}(z,\gamma) < \delta$ für alle $z \in \mathcal{P}$,

(iii) $\displaystyle\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\mathcal{P}} f(z)\,\mathrm{d}z\right| < \varepsilon.$

Aufgabe 4* (10 Punkte)
Es seien $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $a,b,c \in D$. Weiter bezeichne $W_{a,b}$ die Menge aller Wege in D mit Anfangspunkt a und Endpunkt b. Beweisen Sie:

(a) Die Weghomotopie „$\sim$“ definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge $W_{a,b}$.

(b) Gilt $\gamma \sim \delta$ in $W_{a,b}$, so ist $\gamma^{-1} \sim \delta^{-1}$ in $W_{b,a}$.

(c) Aus $\gamma_1 \sim \delta_1$ in $W_{a,b}$ und $\gamma_2 \sim \delta_2$ in $W_{b,c}$ folgt $\gamma_1\gamma_2 \sim \delta_1\delta_2$ in $W_{a,c}$.