

Übungsaufgaben zur Vorlesung Algebra und Funktionentheorie

Prof. Dr. Jürg Kramer

Abgabetermin: 06.02.2023 bis 09:00 Uhr auf Moodle

Bitte beachten:

Jede Aufgabe in separatem PDF abgeben.

Erste Seite in jedem PDF mit Namen und Matrikelnummern versehen.

Partnerabgabe ist erlaubt und wird empfohlen.

Serie 14 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden komplexen Wegintegrale mit Hilfe der (verallgemeinerten) Cauchy'schen Integralformel:

$$(a) \int_{\gamma} \left(\frac{\exp(z)}{z} + 1 \right) dz \text{ für } \gamma(t) := \exp(2\pi it) \quad (t \in [0, 1]),$$

$$(b) \int_{\gamma} \frac{\cos(\pi z)}{z^2 + 1} dz \text{ für } \gamma(t) := 3 \exp(2\pi it) \quad (t \in [0, 1]),$$

$$(c) \int_{\gamma} \frac{\exp(\exp(z))}{(z - i)^3} dz \text{ für } \gamma(t) := i + \exp(2\pi it) \quad (t \in [0, 1]).$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es sei $\alpha > 0$ eine positive reelle Zahl. Zeigen Sie mit Hilfe des Cauchy'schen Integralsatzes die Gleichheit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(- (x + i\alpha)^2/2) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(- x^2/2) dx.$$

Folgern Sie daraus

$$\int_0^{\infty} \exp(- x^2/2) \cos(\alpha x) dx = \frac{1}{2} \sqrt{2\pi} \exp(-\alpha^2/2).$$

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(- x^2/2) dx = \sqrt{2\pi}$ gilt.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es seien $U_1(0) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe und $f: U_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $|f(z)| \leq |z|$ für alle $z \in U_1(0)$. Weiter gelte $f(z_0) = z_0$ für ein $z_0 \in U_1(0) \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass dann $f(z) = z$ für alle $z \in U_1(0)$ gilt.