HU Berlin Wintersemester 2022/23

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Algebra und Funktionentheorie

Prof. Dr. Jürg Kramer

Abgabetermin: 24.10.2022 bis 09:00 Uhr auf Moodle

Bitte beachten:
Jede Aufgabe in separatem PDF abgeben.
Erste Seite in jedem PDF mit Namen und Matrikelnummern versehen.
Partnerabgabe ist erlaubt und wird empfohlen.

Serie 1 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es seien G eine Gruppe und $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler in G, d. h. es gilt $N \leq G$ und $g \circ N = N \circ g$ für alle $g \in G$. Zeigen Sie, dass die Eigenschaft $g \circ N = N \circ g$ für alle $g \in G$ zu den drei folgenden Aussagen äquivalent ist:

(i) Es gilt $g \circ N \circ g^{-1} = N$ für alle $g \in G$.

(ii) Es gilt $g \circ N \circ g^{-1} \subseteq N$ für alle $g \in G$.

(iii) Es gilt: $g \circ n \circ g^{-1} \in N$ für alle $g \in G$ und für alle $n \in N$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es seien n eine positive natürliche Zahle und S_n die symmetrische Gruppe zu n Elementen. Die Abbildung

$$\mathrm{sgn}\colon S_n \longrightarrow \{\pm 1\}$$

sei durch die Zuordnung $\pi \mapsto \mathrm{sgn}(\pi)$ gegeben.

(a) Stellen Sie die Permutationen $\pi_1, \pi_2 \in S_6$, welche durch die Zuordnungsvorschriften

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

gegeben sind, als Produkt von Transpositionen dar. Geben Sie zudem die Zuordnungsvorschrift für die folgenden Permutationen an:

$$\pi_3 := \pi_1 \circ \pi_2, \quad \pi_4 := \pi_2 \circ \pi_1, \quad \pi_5 := \pi_1^{-1}, \quad \pi_6 := \pi_2^{-1}.$$

Bestimmen Sie weiter das Signum $\mathrm{sgn}(\pi_j)$ für $j = 1, \ldots, 6$.

(b) Beweisen Sie, dass die Abbildung sgn ein Gruppenhomomorphismus ist, d. h. dass für alle $\pi, \pi' \in S_n$ die Gleichheit

$$\operatorname{sgn}(\pi \circ \pi') = \operatorname{sgn}(\pi) \cdot \operatorname{sgn}(\pi')$$

besteht. Folgern Sie daraus, dass für alle $\pi \in S_n$ die Gleichheit $\operatorname{sgn}(\pi^{-1}) = \operatorname{sgn}(\pi)$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass die *alternierende Gruppe* A_n, gegeben durch

$$A_n := \{\pi \in S_n \,|\, \operatorname{sgn}(\pi) = 1\},$$

ein Normalteiler in S_n ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Wir betrachten die Menge G der oberen Dreiecksmatrizen in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, d. h. die Menge

$$G := \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, d \in \mathbb{Z},\ \det(M) = \pm 1 \right\}$$

sowie die Teilmenge

$$N := \left\{ M = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; b \in \mathbb{Z} \right\} \subseteq G.$$

(a) Zeigen Sie, dass G bezüglich der Matrixmultiplikation eine Gruppe bildet.

(b) Zeigen Sie, dass N ein Normalteiler in G ist.