Übungsaufgaben zur Vorlesung
Algebra und Funktionentheorie

Prof. Dr. Jürg Kramer

Abgabetermin: 31.10.2022 bis 09:00 Uhr auf Moodle

Bitte beachten:
Jede Aufgabe in separatem PDF abgeben.
Erste Seite in jedem PDF mit Namen und Matrikelnummern versehen.
Partnerabgabe ist erlaubt und wird empfohlen.

Serie 2 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

(a) Es sei p eine Primzahl. Beweisen Sie, dass es bis auf Isomorphie genau eine Gruppe G der Ordnung $|G| = p$ gibt und dass diese zyklisch ist.

(b) Klassifizieren Sie alle Gruppen G der Ordnungen kleiner oder gleich 7 bis auf Isomorphie. Sofern nötig, verwenden Sie für Ihre Begründungen eine Gruppentafel.

(c) Geben Sie mindestens ein Beispiel einer kommutativen und einer nicht-kommutativen Gruppe der Ordnung 8 durch Angabe der entsprechenden Gruppentafel.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es seien G eine Gruppe und $H \leq G$ eine Untergruppe von G. Wir definieren das *Zentrum* $Z(G)$ *von* G als

$$Z(G) := \{z \in G \,|\, g \circ z = z \circ g,\, \forall g \in G\}$$

und den *Normalisator* $N_G(H)$ *von* H *in* G als

$$N_G(H) := \{g \in G \,|\, g \circ H = H \circ g\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Das Zentrum $Z(G)$ von G ist ein Normalteiler von G.

(b) Der Normalisator $N_G(H)$ von H in G ist eine Untergruppe von G.

(c) Die Untergruppe H ist ein Normalteiler von $N_G(H)$.

(d) Ist $H' \leq G$ eine weitere Untergruppe, so dass $H \leq H'$ Normalteiler von H' ist, so gilt $H' \leq N_G(H)$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

(a) Es seien G eine Gruppe und $N \leq G$ eine Untergruppe vom Index 2 in G. Zeigen Sie, dass N ein Normalteiler von G ist.

(b) Es sei G eine Gruppe derart, dass 3 der kleinste Primteiler von $|G|$ ist. Weiter sei $N \leq G$ eine Untergruppe vom Index 3 in G. Zeigen Sie, dass N ein Normalteiler von G ist.
Hinweis: Beachten Sie, dass die Gruppe G durch „Linksmultiplikation" eine Permutation der drei Linksnebenklassen von N in G bewirkt und somit einen Gruppenhomomorphismus $f\colon G \longrightarrow S_3$ definiert.