Übungsaufgaben zur Vorlesung
Algebra und Funktionentheorie

Prof. Dr. Jürg Kramer

Abgabetermin: 07.11.2022 bis 09:00 Uhr auf Moodle

Bitte beachten:
Jede Aufgabe in separatem PDF abgeben.
Erste Seite in jedem PDF mit Namen und Matrikelnummern versehen.
Partnerabgabe ist erlaubt und wird empfohlen.

Serie 3 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

(a) Es seien G und H Gruppen und $g \in G$ mit $\mathrm{ord}_G(g) < \infty$. Zeigen Sie: Ist $f\colon G \longrightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus, so gilt, dass die Ordnung $\mathrm{ord}_H(f(g))$ von $f(g)$ die Ordnung $\mathrm{ord}_G(g)$ von g teilt.

(b) Sei n eine positive natürliche Zahl. Zeigen Sie, dass der einzige Gruppenhomomorphismus $f\colon \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ der Nullhomomorphismus ist.

(c) Es seien G eine Gruppe und $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler vom Index 3 in G. Finden Sie alle nicht-trivialen Gruppenhomomorphismen $f\colon G \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ für $n = 2, 3, \ldots, 10$ mit $N \leq \ker(f)$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es sei $\mathcal{W}$ die Menge der 1-dimensionalen Unterräume im $\mathbb{F}_3$-Vektorraum $\mathbb{F}_3^2$; es gilt $|\mathcal{W}| = 4$. Die Gruppe $G := \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ operiert auf der Menge $\mathcal{W}$ durch die Vorschrift

$$S \bullet W := \left\{ S \cdot w \,\middle|\, w \in W \right\} \in \mathcal{W} \qquad (S \in G,\, W \in \mathcal{W}).$$

(a) Zeigen Sie, dass diese Operation einen Gruppenhomomorphismus $f\colon G \longrightarrow S_4$ induziert.

(b) Bestimmen Sie $\ker(f)$ und $\mathrm{im}(f)$ sowie die Ordnung $|G|$ von G.

(c) Es seien die Untergruppen

$$K := \left\{ S \in G \,\middle|\, \det(S) = 1,\, S^2 = \pm E \right\}, \qquad H := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \,\middle|\, \beta,\, \delta \in \mathbb{F}_3;\, \delta \neq 0 \right\}$$

von G gegeben. Zeigen Sie, dass $G = HK$ gilt.

Hinweis: Verwenden Sie den ersten Isomorphiesatz und zeigen Sie, dass $|HK| = |G|$ gilt.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es seien G eine Gruppe mit Zentrum $Z(G)$ und p eine Primzahl. Zeigen Sie:

(a) Ist die Faktorgruppe $G/Z(G)$ zyklisch, so ist G abelsch.

(b) Gilt $|G| = p^n$ mit einer positiven natürlichen Zahl n, so ist das Zentrum $Z(G)$ nicht trivial.

Hinweis: Betrachten Sie die Konjugationswirkung von G auf sich selbst (gegeben durch die Zuordnung $(g, m) \mapsto g \circ m \circ g^{-1}$ mit $g, m \in G$) und verwenden Sie die Bahnformel.

(c) Folgern Sie aus (a) und (b), dass alle Gruppen der Ordnung p^2 abelsch sind.