

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Algebra / Zahlentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 13.05.2024 bis 09:00 Uhr auf Moodle

Bitte beachten:**Jede Aufgabe in separatem PDF abgeben.****Erste Seite in jedem PDF mit Namen und Matrikelnummern versehen.****Partnerabgabe ist erlaubt und wird empfohlen.****Serie 4 (30 Punkte)****Aufgabe 1 (10 Punkte)**

Untersuchen Sie, ob folgende Mengen M mit der Verknüpfung \circ eine Halbgruppe oder ein Monoid bilden. Ist die Verknüpfung kommutativ?

- (a) $M = 2\mathbb{N} + 1$ mit $m \circ n := 3(m + n)$ ($m, n \in 2\mathbb{N} + 1$).
- (b) $M = 2\mathbb{N} + 1$ mit $m \circ n := 3 \cdot m \cdot n$ ($m, n \in 2\mathbb{N} + 1$).
- (c) $M = \mathbb{N}$ mit $m \circ n := \min\{m, n\}$ ($m, n \in \mathbb{N}$).
- (d) $M = \mathbb{N}$ mit $m \circ n := m^n$ ($m, n \in \mathbb{N}$).

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es sei n eine von Null verschiedene natürliche Zahl. Wir betrachten die Teilmenge $\mathcal{R}_n := \{0, \dots, n-1\}$ der ersten n natürlichen Zahlen. Auf der Menge \mathcal{R}_n wurden in der Vorlesung die beiden folgenden Verknüpfungen eingeführt:

$$\oplus: \mathcal{R}_n \times \mathcal{R}_n \longrightarrow \mathcal{R}_n, \quad \text{gegeben durch } (a, b) \mapsto a \oplus b := R_n(a + b);$$

$$\odot: \mathcal{R}_n \times \mathcal{R}_n \longrightarrow \mathcal{R}_n, \quad \text{gegeben durch } (a, b) \mapsto a \odot b := R_n(a \cdot b).$$

Hierbei bezeichnet $R_n(c) \in \mathcal{R}_n$ den Rest der natürlichen Zahl c nach Division durch n .

Die Assoziativität der Verknüpfungen \oplus und \odot wird in den Übungen gezeigt. Diese kann also im Folgenden vorausgesetzt werden.

- (a) Zeigen Sie, dass (\mathcal{R}_n, \oplus) eine abelsche Gruppe ist. Geben Sie die Gruppentafel für (\mathcal{R}_6, \oplus) an.
- (b) Es sei $n \in \{1, \dots, 6\}$. Entscheiden Sie, wann $(\mathcal{R}_n \setminus \{0\}, \odot)$ eine abelsche Gruppe ist und geben Sie gegebenenfalls die entsprechende Gruppentafel an.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es sei (G, \circ) eine Gruppe. Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln:

- (a) $(g^{-1})^{-1} = g$ für alle $g \in G$.
- (b) $(g \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ g^{-1}$ für alle $g, h \in G$.
- (c) $g^n \circ g^m = g^{n+m}$ für alle $g \in G$ und alle $n, m \in \mathbb{N}$.
- (d) $(g^n)^m = g^{n \cdot m}$ für alle $g \in G$ und alle $n, m \in \mathbb{N}$.