HU Berlin Wintersemester 2022/23

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Algebra und Funktionentheorie

Prof. Dr. Jürg Kramer

Abgabetermin: 14.11.2022 bis 09:00 Uhr auf Moodle

Bitte beachten:
Jede Aufgabe in separatem PDF abgeben.
Erste Seite in jedem PDF mit Namen und Matrikelnummern versehen.
Partnerabgabe ist erlaubt und wird empfohlen.

Serie 4 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

(a) Es seien n eine positive natürliche Zahl und p eine Primzahl. Wir betrachten dann die Untergruppe

$$\mathrm{B}_n(\mathbb{F}_p) := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{1,2} & \dots & \alpha_{1,n} \\ 0 & 1 & \dots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{j,k} \in \mathbb{F}_p \right\}$$

der oberen Dreicksmatrizen in der allgemeinen linearen Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{B}_n(\mathbb{F}_p)$ eine p-Sylowuntergruppe in $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ ist.

(b) Bestimmen Sie speziell für die Gruppe $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_p)$ für jede mögliche Potenz p^s der Primzahl p mindestens eine Untergruppe der Ordnung p^s.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

(a) Sei p eine Primzahl. Klassifizieren Sie alle Gruppen der Ordnung $2p$.

(b) Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung $p \cdot q$, wobei p, q Primzahlen mit $p < q$ und $q \not\equiv 1 \mod p$ sind. Zeigen Sie, dass G zyklisch ist.

(c) Klassifizieren Sie die nicht-abelschen Gruppen der Ordnung 8 bis auf Isomorphie.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie das Inverse von $71 \mod 101$ in der multiplikativen Gruppe des Körpers $\mathbb{F}_{101}$, d. h. in der Gruppe $\big(\mathbb{F}_{101} \setminus \{0\}, \cdot\big)$.

(b) Bestimmen Sie explizit die Umkehrabbildung des Gruppenisomorphismus

$$\mathbb{Z}/89\,081\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/229\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/389\mathbb{Z},$$

welcher durch die Zuordnung

$$a + 89\,081\mathbb{Z} \mapsto (a + 229\mathbb{Z}, a + 389\mathbb{Z})$$

gegeben ist.