Übungsaufgaben zur Vorlesung
Algebra / Zahlentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 27.05.2024 bis 09:00 Uhr auf Moodle

Bitte beachten:
Jede Aufgabe in separatem PDF abgeben.
Erste Seite in jedem PDF mit Namen und Matrikelnummern versehen.
Partnerabgabe ist erlaubt und wird empfohlen.

Serie 6 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

(a) Finden Sie alle Gruppenhomomorphismen

$$f\colon (\mathcal{R}_6, \oplus) \longrightarrow (\mathcal{R}_6, \oplus).$$

Bestimmen Sie jeweils Kern und Bild dieser Gruppenhomomorphismen.

(b) Zeigen Sie, dass die Gruppen $(\mathcal{R}_6, \oplus)$ und $(\mathcal{R}_7 \setminus \{0\}, \odot)$ zueinander isomorph sind.

(c) Es seien $p \neq q$ zwei Primzahlen. Beweisen Sie: Ist $f\colon (\mathcal{R}_p, \oplus) \longrightarrow (\mathcal{R}_q, \oplus)$ ein Gruppenhomomorphismus, so muss für alle $n \in \mathcal{R}_p$ die Gleichheit $f(n) = 0$ gelten.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es seien $(G, \circ)$ eine Gruppe und $U \leq G$ eine Untergruppe.

(a) Zeigen Sie, dass die Relation

$$g_1 \sim g_2 \quad \Longleftrightarrow \quad g_1^{-1} \circ g_2 \in U \quad (g_1, g_2 \in G)$$

eine Äquivalenzrelation auf G definiert.

(b) Zeigen Sie, dass die Äquivalenzklasse eines Element $g \in G$ zu der im Aufgabenteil (a) betrachteten Relation $\sim$ durch die Menge

$$g \circ U := \{g' \in G \,|\, g' = g \circ u,\, u \in U\}$$

gegeben ist. Diese Äquivalenzlasse wird in der Gruppentheorie die *Linksnebenklasse zum Element $g \in G$ bezüglich der Untergruppe U* genannt.

(c) Zeigen Sie, dass alle Linksnebenklassen bezüglich der Untergruppe U gleichmächtig sind.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

(a) Es sei $(H, \circ)$ eine reguläre Halbgruppe und $h \in H$. Die Abbildung $f_h \colon H \longrightarrow H$ sei gegeben durch $f_h(g) := g \circ h$ $(g \in H)$. Untersuchen Sie, ob f_h im Allgemeinen injektiv ist. Untersuchen Sie weiter, ob f_h im Allgemeinen surjektiv ist.

(b) Beweisen Sie, dass die Halbgruppe $(\mathbb{N}, \circ)$ mit der Verknüpfung $m \circ n := \max\{m, n\}$ $(m, n \in \mathbb{N})$ nicht regulär ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Abbildung f_h aus Aufgabenteil (a) für die Halbgruppe $(\mathbb{N}, \circ)$ aus Aufgabenteil (b) im Allgemeinen nicht injektiv ist.