Übungsaufgaben zur Vorlesung
Algebra und Funktionentheorie

Prof. Dr. Jürg Kramer

Abgabetermin: 28.11.2022 bis 09:00 Uhr auf Moodle

Bitte beachten:
Jede Aufgabe in separatem PDF abgeben.
Erste Seite in jedem PDF mit Namen und Matrikelnummern versehen.
Partnerabgabe ist erlaubt und wird empfohlen.

Serie 6 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

(a) Es sei K eine Untergruppe einer endlichen abelschen Gruppe G. Zeigen Sie, dass eine Untergruppe H von G existiert, die zu G/K isomorph ist.

(b) Es sei $G = Q_8$ die Quaternionengruppe, d. h.

$$Q_8 = \big\{ \pm 1, \pm i, \pm j, \pm k \big\},$$

die in Aufgabe 2 (c) von Serie 4 untersucht wurde.
Finden Sie einen Normalteiler K von G, so dass die Faktorgruppe G/K zu keiner der Untergruppen von G isomorph ist (d. h., die Aussage in (a) ist für nicht-abelsche Gruppen im Allgemeinen falsch).

Aufgabe 2 (10 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass jede endliche Gruppe G eine Kompositionsreihe besitzt.
Hinweis: Verwenden Sie vollständige Induktion nach der Ordnung von G.

(b) Geben Sie zwei verschiedene, zueinander isomorphe Normalreihen der Diedergruppe D_{12} des regelmäßigen Sechsecks an.

(c) Wir betrachten die Teilmenge $V_4 \coloneqq \big\{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\big\}$ der symmetrischen Gruppe S_4. Zeigen Sie, dass V_4 ein Normalteiler in S_4 ist.

(d) Bestimmen Sie alle Kompositionsreihen der symmetrischen Gruppe S_4 bis auf Isomorphie.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die alternierende Gruppe A_n von den 3-Zykeln der symmetrischen Gruppe S_n erzeugt wird.

(b) Zeigen Sie, dass für $n \geq 5$ alle 3-Zykeln in A_n zueinander konjugiert sind.

(c) Zeigen Sie, dass die alternierende Gruppe A_n für $n \geq 5$ einfach ist.
Hinweis: Zeigen Sie dazu, dass ein nicht-trivialer Normalteiler $N \trianglelefteq A_n$ mindestens einen 3-Zykel besitzt.