HU Berlin Sommersemester 2024

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Algebra / Zahlentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 03.06.2024 bis 09:00 Uhr auf Moodle

Bitte beachten:
Jede Aufgabe in separatem PDF abgeben.
Erste Seite in jedem PDF mit Namen und Matrikelnummern versehen.
Partnerabgabe ist erlaubt und wird empfohlen.

Serie 7 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Wir definieren auf der Gruppe der ganzen Zahlen $(\mathbb{Z}, +)$, gegeben durch die in der Vorlesung eingeführten Äquivalenzklassen $[a, b]$ mit $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, eine Multiplikation durch

$$[a, b] \cdot [a', b'] := [aa' + bb', ab' + a'b] \qquad (a, b, a', b' \in \mathbb{N}),$$

wobei rechter Hand auf die Multiplikation natürlicher Zahlen zurückgegriffen wird.

Zeigen Sie, dass die derart definierte Multiplikation unabhängig von der Wahl der Repräsentanten ist. Beweisen Sie weiter eines der beiden Distributivgesetze.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die kommutative Halbgruppe $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \cdot)$ regulär ist.

(b) Wenden Sie die Konstruktion einer Gruppe $(G, \circ)$ aus einer kommutativen regulären Halbgruppe auf die Halbgruppe $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \cdot)$ an. Welches ist die zugrunde liegende Äquivalenzrelation? Wie ist die zugrunde liegende Verknüpfung definiert? Mit welchem Zahlbereich können Sie die so konstruierte Gruppe $(G, \circ)$ identifizieren, d. h. zu welchem Zahlbereich ist $(G, \circ)$ isomorph?

(c) Sind die Halbgruppen $(\mathbb{N}, +)$ und $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \cdot)$ zueinander isomorph? Sind die aus $(\mathbb{N}, +)$ und $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \cdot)$ konstruierten Gruppen $(\mathbb{Z}, +)$ und $(G, \circ)$ zueinander isomorph? Begründen Sie.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Ordnungsrelation „ $<$ “ auf der Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ die beiden folgenden Regeln erfüllt:

(a) Für alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$ gilt mit $a < b$ auch $a + c < b + c$.

(b) Für alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$ gilt mit $a < b$ die Ungleichung

$$a \cdot c < b \cdot c, \text{ falls } c > 0 \quad \text{bzw.} \quad a \cdot c > b \cdot c, \text{ falls } c < 0.$$

Hinweis: Man beweise zuerst, dass für zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ die Relation $a < b$ äquivalent zur Relation $b - a > 0$ ist.