Übungsaufgaben zur Vorlesung
Algebra und Funktionentheorie

Prof. Dr. Jürg Kramer

Abgabetermin: 05.12.2022 bis 09:00 Uhr auf Moodle

Bitte beachten:
Jede Aufgabe in separatem PDF abgeben.
Erste Seite in jedem PDF mit Namen und Matrikelnummern versehen.
Partnerabgabe ist erlaubt und wird empfohlen.

Serie 7 (30+10 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es sei $\{e\} \longrightarrow G' \longrightarrow G \longrightarrow G'' \longrightarrow \{e\}$ eine kurze exakte Sequenz von Gruppen. Beweisen Sie: Die Gruppe G ist genau dann auflösbar, wenn sowohl G' als auch G'' auflösbar sind.
Hinweis: Verwenden Sie die Isomorphiesätze.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es sei G eine Gruppe mit neutralem Element e. Wir bezeichnen mit

$$[G, G] \coloneqq \left\langle ghg^{-1}h^{-1} \,\middle|\, g, h \in G \right\rangle$$

den *Kommutator von* G. Weiter seien die *j-ten iterierten Kommutatoren $D^j(G)$ von G* für $j \in \mathbb{N}$ induktiv durch $D^0(G) \coloneqq G$ und $D^{j+1}(G) \coloneqq [D^j(G), D^j(G)]$ definiert. Beweisen Sie:

(a) Der Kommutator $[G, G]$ ist ein Normalteiler in G und die Faktorgruppe $G/[G, G]$ ist abelsch.

(b) Die Gruppe G ist genau dann auflösbar, wenn eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ existiert, für die $D^n(G) = \{e\}$ gilt.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es sei R ein kommutativer Ring mit Einselement. Zeigen Sie:

(a) Die Summe $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ und der Durchschnitt $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ zweier Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq R$ sind ebenfalls Ideale in R.

(b) Ein Ideal $\mathfrak{p} \subsetneq R$ ist genau dann ein Primideal, wenn $R/\mathfrak{p}$ ein Integritätsbereich ist.

(c) Ein Ideal $\mathfrak{m} \subsetneq R$ ist genau dann ein maximales Ideal, wenn $R/\mathfrak{m}$ ein Körper ist.

Aufgabe 4* (10 Punkte)

(a) Die Menge

$$\mathbb{Q}(\sqrt{-3}) \coloneqq \left\{ a + b\sqrt{-3} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Q} \right\}$$

mit den natürlichen Operationen

$$\begin{aligned}(a + b\sqrt{-3}) + (c + d\sqrt{-3}) &\coloneqq (a + c) + (b + d)\sqrt{-3}\\ (a + b\sqrt{-3}) \cdot (c + d\sqrt{-3}) &\coloneqq (ac - 3bd) + (ad + bc)\sqrt{-3}\end{aligned}$$

ist ein Ring. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ sogar ein Körper ist.

(b) Bestimmen Sie alle Einheiten des Unterrings

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-3}] \coloneqq \left\{ \alpha = \frac{a + b\sqrt{-3}}{2} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z},\ a \equiv b \bmod 2 \right\} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{-3}).$$

Hinweis: Definieren Sie die *Norm* $N(\alpha)$ *eines Elements* $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ durch

$$N(\alpha) \coloneqq \frac{a^2 + 3b^2}{4}\,.$$

Beweisen und verwenden Sie die Eigenschaften $N(\alpha) \in \mathbb{Z}$ und $N(\alpha \cdot \beta) = N(\alpha) \cdot N(\beta)$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$.