HU Berlin Sommersemester 2024

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Algebra / Zahlentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 10.06.2024 bis 09:00 Uhr auf Moodle

Bitte beachten:
Jede Aufgabe in separatem PDF abgeben.
Erste Seite in jedem PDF mit Namen und Matrikelnummern versehen.
Partnerabgabe ist erlaubt und wird empfohlen.

Serie 8 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Beweisen Sie die Gültigkeit der Division mit Rest im Bereich der ganzen Zahlen, d. h. gegeben $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $b \neq 0$, dann existieren eindeutig bestimmte ganze Zahlen q, r mit $0 \leq r < |b|$, so dass die Gleichheit

$$a = q \cdot b + r$$

besteht.

Hinweis: Es darf die Gültigkeit der Division mit Rest im Bereich der natürlichen Zahlen vorausgesetzt werden.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es seien G eine Gruppe und $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler in G, d. h. es gilt $g \circ N = N \circ g$ für alle $g \in G$. Zeigen Sie, dass die Normalteilereigenschaft von N zu den drei folgenden Aussagen äquivalent ist:

(i) Es gilt $g \circ N \circ g^{-1} = N$ für alle $g \in G$.

(ii) Es gilt $g \circ N \circ g^{-1} \subseteq N$ für alle $g \in G$.

(iii) Es gilt: $g \circ n \circ g^{-1} \in N$ für alle $g \in G$ und für alle $n \in N$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es sei S_3 die 3-te symmetrische Gruppe, welche gegeben ist durch die Permutationen

$$S_3 = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6\},$$

wobei

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$
$$\pi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \pi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \pi_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die sogenannte 3-*te alternierende Gruppe*

$$A_3 \coloneqq \{\pi_1, \pi_2, \pi_3\} \subseteq S_3$$

ein Normalteiler von S_3 ist.