Übungsaufgaben zur Vorlesung
Algebra und Funktionentheorie

Prof. Dr. Jürg Kramer

Abgabetermin: 12.12.2022 bis 09:00 Uhr auf Moodle

Bitte beachten:
Jede Aufgabe in separatem PDF abgeben.
Erste Seite in jedem PDF mit Namen und Matrikelnummern versehen.
Partnerabgabe ist erlaubt und wird empfohlen.

Serie 8 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Betrachten Sie die Zahl $\alpha \coloneqq \sqrt{3} + \sqrt{5} \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$.

(b) Finden Sie ein Polynom $f \in \mathbb{Q}[X]$ mit $f(\alpha) = \alpha^{-1}$.

(c) Gegeben sei das Polynom $g(X) = X^5 + 2X^3 + X + 1$. Stellen Sie $g(\alpha)$ als rationale Linearkombination von 1, α, α^2 und α^3 dar.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es sei $f(X) = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j X^j$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten vom Grad $n > 0$.

(a) Beweisen Sie das *Eisensteinsche Irreduzibilitätskriterium:* Falls es eine Primzahl p gibt, so dass gilt

(i) $p \nmid a_n$,

(ii) $p \mid a_j$ $(j = 0, \ldots, n-1)$,

(iii) $p^2 \nmid a_0$,

so ist $f(X)$ irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$.

(b) Zeigen Sie: Ist $f(X)$ ein Polynom in $\mathbb{Z}[X]$, das die Eigenschaften (i)–(iii) aus Aufgabenteil (a) für eine Primzahl p erfüllt (und somit irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ ist), so ist auch das Polynom $g(X) = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \ldots + a_n$ irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$.

(c) Zeigen Sie, dass das Polynom $6X^5 - 9X^3 + 12X^2 - 4$ irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

(a) Ermitteln Sie alle irreduziblen Polynome vom Grad ≤ 4 in $\mathbb{F}_2[X]$.

(b) Zeigen Sie: Es gibt Körper mit 4, 8 bzw. 16 Elementen.