HU Berlin Sommersemester 2024

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Algebra / Zahlentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 17.06.2024 bis 09:00 Uhr auf Moodle

Bitte beachten:
Jede Aufgabe in separatem PDF abgeben.
Erste Seite in jedem PDF mit Namen und Matrikelnummern versehen.
Partnerabgabe ist erlaubt und wird empfohlen.

Serie 9 (30 + 10 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

(a) Es seien G eine Gruppe und $H, K \trianglelefteq G$ Normalteiler in G mit $K \subseteq H$. Zeigen Sie: K ist ein Normalteiler in H, und es besteht die Gruppenisomorphie

$$(G/K)/(H/K) \cong G/H.$$

Hinweis: Verwenden Sie den Homomorphiesatz für Gruppen.

(b) Es seien $m, n \in \mathbb{Z}$ ganzen Zahlen mit $m|n$. Zeigen Sie, unter Verwendung von Aufgabenteil (a), dass die Isomorphie

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/(m\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$$

besteht.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

(a) Es seien $(R, +, \cdot\,)$ ein Ring mit Einselement 1 und

$$R^\times \coloneqq \left\{a \in R \,\middle|\, \exists\, b \in R\colon a \cdot b = 1 = b \cdot a\right\} \subseteq R$$

die Menge aller Elemente in R, die in R multiplikativ invertierbar sind. Zeigen Sie: $(R^\times, \cdot\,)$ ist eine Gruppe. Man nennt sie die *Einheitengruppe von R.*

(b) Bestimmen Sie die Einheitengruppen der Ringe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ für $n = 7, 9, 13, 21$. Welche dieser Gruppen sind zyklisch? Welche sind zueinander isomorph?

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Integritätsbereich mit Einselement 1. Wir definieren den *Polynomring* $(R[X], +, \cdot)$ *in der Variablen* X *mit Koeffizienten aus* R als die Menge

$$R[X] \coloneqq \left\{ \sum_{j \in \mathbb{N}} a_j \cdot X^j \,\middle|\, a_j \in R,\ a_j = 0 \text{ für alle bis auf endliche viele } j \in \mathbb{N} \right\}$$

mit den Verknüpfungen

$$\left(\sum_{j \in \mathbb{N}} a_j \cdot X^j \right) + \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} b_j \cdot X^j \right) \coloneqq \sum_{j \in \mathbb{N}} (a_j + b_j) \cdot X^j,$$
$$\left(\sum_{j \in \mathbb{N}} a_j \cdot X^j \right) \cdot \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} b_j \cdot X^j \right) \coloneqq \sum_{j \in \mathbb{N}} \left(\sum_{\substack{k,\ell \in \mathbb{N} \\ k+\ell=j}} a_k \cdot b_\ell \right) \cdot X^j.$$

(a) Zeigen Sie, dass $(R[X], +, \cdot)$ ein Integritätsbereich mit Einselement ist.

(b) Weisen Sie nach, dass die Einheitengruppe von $R[X]$ mit der Einheitengruppe von R übereinstimmt.

Aufgabe 4* (10 Punkte)

(a) Berechnen Sie den größten gemeinsamen Teiler (a, b) für die drei Paare ganzer Zahlen

- $a = 105, b = 40$
- $a = 2011, b = -229$
- $a = -2023, b = -238$

unter Verwendung des Euklidischen Algorithmus.

(b) Stellen Sie mit Hilfe des Erweiterten Euklidischen Algorithmus die in Aufgabenteil (a) berechneten größten gemeinsamen Teiler als ganzzahlige Linearkombinationen von a und b dar, d. h. bestimmen Sie $x, y \in \mathbb{Z}$ mit der Eigenschaft

$$(a, b) = x \cdot a + y \cdot b.$$