Übungsaufgaben zur Vorlesung
Algebra und Funktionentheorie

Prof. Dr. Jürg Kramer

Abgabetermin: 02.01.2023 bis 09:00 Uhr auf Moodle

Bitte beachten:
Jede Aufgabe in separatem PDF abgeben.
Erste Seite in jedem PDF mit Namen und Matrikelnummern versehen.
Partnerabgabe ist erlaubt und wird empfohlen.

Serie 9 (40 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

(a) Es sei $K \subseteq L \subseteq E$ eine Kette von Körpererweiterungen. Zeigen Sie, dass E/K genau dann algebraisch ist, wenn sowohl E/L als auch L/K algebraisch sind.

(b) Es seien E/K eine Körpererweiterung und $\alpha, \beta \in E$ algebraisch über K.
Beweisen Sie die Ungleichung

$$[K(\alpha, \beta) : K] \leq [K(\alpha) : K] \cdot [K(\beta) : K].$$

Zeigen Sie, dass im Fall $\mathrm{ggT}([K(\alpha) : K], [K(\beta) : K]) = 1$ sogar die Gleichheit gilt.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Sei K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Zeigen Sie: Wenn L/K eine Körpererweiterung vom Grad 2 ist, dann ist $L = K(\sqrt{a})$ für ein $a \in K$. Finden Sie ein Beispiel, das belegt, dass diese Aussage für $\mathrm{char}(K) = 2$ im Allgemeinen falsch ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es seien K ein Körper und $p \in K[X]$. Beweisen Sie:

(a) Das Polynom p ist genau dann separabel (d. h. hat keine mehrfachen Nullstellen), wenn $\mathrm{ggT}(p, p')$ eine Einheit in $K[X]$ ist.

(b) Ist p irreduzibel, so ist p genau dann separabel, wenn $p' \neq 0$ gilt.

(c) Es sei nun $K = \mathbb{F}_3(T)$ der Körper der rationalen Funktionen über $\mathbb{F}_3$. Zeigen Sie, dass das Polynom $X^3 - T \in K[X]$ irreduzibel und inseparabel über K ist.

Aufgabe 4 (10 Punkte)
Es sei $E := \mathbb{Q}\big(\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt[3]{7}\big)$ eine Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$. Bestimmen Sie ein $\vartheta \in E$ mit der Eigenschaft $E = \mathbb{Q}(\vartheta)$.

$\star$ Frohe Feiertage und ein gutes Neues Jahr 2023! $\star$