HU Berlin Sommersemester 2023

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Algebra / Zahlentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 10.07.2023 bis 09:00 Uhr auf Moodle

Bitte beachten:
Jede Aufgabe in separatem PDF abgeben.
Erste Seite in jedem PDF mit Namen und Matrikelnummern versehen.
Partnerabgabe ist erlaubt und wird empfohlen.

Serie 11 (30 + 10 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

(a) Weisen Sie nach, dass die Folgen $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\geq 0}$ und $\left(\frac{n}{2^n}\right)_{n\geq 0}$ rationale Nullfolgen sind.

(b) Zeigen Sie, dass die Folge $\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)_{n\geq 0}$ eine rationale Cauchyfolge ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es sei $\mathfrak{n}$ das Ideal der rationalen Nullfolgen im kommutativen Ring der rationalen Cauchyfolgen $(M, +, \cdot\,)$. Wir erweitern die auf $\mathbb{Q}$ gegebene Relation „$<$“ auf die Menge $\mathbb{R} = M/\mathfrak{n}$ der reellen Zahlen, indem wir für zwei reelle Zahlen $\alpha = (a_n) + \mathfrak{n}$ und $\beta = (b_n) + \mathfrak{n}$ definieren:

$$\alpha < \beta \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, q \in \mathbb{Q},\, q > 0,\, N(q) \in \mathbb{N}\colon b_n - a_n > q,\, \forall\, n \in \mathbb{N},\, n > N(q).$$

Zeigen Sie, dass diese Definition sinnvoll ist, d. h. unabhängig von der Wahl der die reellen Zahlen α bzw. β repräsentierenden rationalen Cauchyfolgen (a_n) bzw. (b_n).

Aufgabe 3 (10 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass keine rationale Zahl r mit $r^2 = 2$ existiert.

(b) Es sei $a_0 := 2$. Wir definieren dann für $n \in \mathbb{N}$ rekursiv $a_{n+1} := \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass die rationale Zahlenfolge (a_n) einen Grenzwert

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$$

besitzt.

(c) Zeigen Sie, dass $\alpha^2 = 2$ gilt. Wir nennen $\alpha = \sqrt{2}$ die *Quadratwurzel von* 2.

Aufgabe 4* (10 Punkte)

(a) Beweisen Sie, dass die Dezimalbruchentwicklung einer rationalen Zahl $\frac{a}{b}$ mit $(a,b) = 1$ genau dann abbricht, wenn b nur die Primteiler 2 und 5 besitzt.

(b) In gewissen Kulturen werden Zahlen im Hexalsystem, also zur Basis 6, angegeben, da man so mit zwei Händen leicht die Zahlen von 0 bis 35 anzeigen kann (nämlich wie ?). Analog zur Dezimaldarstellung ist die Hexaldarstellung einer rationalen Zahl durch

$$\pm q_\ell \dots q_0, q_{-1} \dots q_{-k} \dots := \pm \sum_{j=-\ell}^{\infty} q_{-j} \cdot 6^{-j} \qquad \big(q_{-j} \in \{0,1,2,3,4,5\}\big)$$

gegeben. Äußern Sie eine Vermutung, wann genau eine rationale Zahl eine abbrechende Hexaldarstellung besitzt.