HU Berlin Sommersemester 2023

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Algebra / Zahlentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 08.05.2023 bis 09:00 Uhr auf Moodle

Bitte beachten:
Jede Aufgabe in separatem PDF abgeben.
Erste Seite in jedem PDF mit Namen und Matrikelnummern versehen.
Partnerabgabe ist erlaubt und wird empfohlen.

Serie 2 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

(a) Es seien $a_1, \ldots, a_k$ natürliche Zahlen. Ferner sei bekannt, dass die natürliche Zahl $a_1 \cdot \ldots \cdot a_k + 1$ durch 4 teilbar ist. Beweisen Sie, dass wenigstens eine der Zahlen $a_1 + 1, \ldots, a_k + 1$ durch 4 teilbar ist.

(b) Nutzen Sie die Beweisidee des Satzes von Euklid (Satz I.2.10) und Aufgabenteil (a), um zu zeigen, dass es sogar in der Teilmenge der natürlichen Zahlen

$$3 + 4 \cdot \mathbb{N} \coloneqq \{3, 3+4, 3+8, \ldots, 3+4\cdot n, \ldots \mid n \in \mathbb{N}\}$$

unendlich viele Primzahlen gibt.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

(a) Eine Primzahl der Form $p = 2^n - 1$ ($n \in \mathbb{N}$) heißt *Mersennesche Primzahl*. Zeigen Sie: Wenn $2^n - 1$ eine Primzahl ist, dann ist notwendigerweise auch n eine Primzahl. Gilt auch die Umkehrung?

(b) Eine natürliche Zahl n heißt *vollkommen*, falls die Summe all ihrer Teiler $2n$ ergibt, d. h. falls

$$\sum_{d \mid n} d = 2n$$

gilt. Beweisen Sie: Wenn n von der Form $n = 2^m \cdot (2^{m+1} - 1)$ mit $m \in \mathbb{N}$ und $m \geq 1$ sowie $2^{m+1} - 1$ eine Primzahl ist, so ist n vollkommen.

Bemerkung: Es lässt sich beweisen, dass alle geraden vollkommenen Zahlen von dieser Form sind.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

In der Vorlesung wurde als Teil von Satz I.3.1 (Fundamentalsatz der elementaren Zahlentheorie) bewiesen, dass eine natürliche Zahl $a > 0$ nicht zwei Primfaktorzerlegungen besitzen kann, in denen unterschiedliche Primfaktoren vorkommen. Vervollständigen Sie den Beweis der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung, indem Sie noch folgende Aussage zeigen:

Eine natürliche Zahl $a > 0$ besitze die Primfaktorzerlegungen

$$a = p_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{a_r} \qquad \text{und} \qquad a = p_1^{b_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{b_r}$$

mit paarweise verschiedenen Primzahlen $p_1, \ldots, p_r$ und positiven natürlichen Zahlen $a_1, \ldots, a_r$ bzw. $b_1, \ldots, b_r$. Dann gilt $a_j = b_j$ für $j = 1, \ldots, r$.

Hinweis: Verwenden Sie vollständige Induktion nach r.