HU Berlin Sommersemester 2023

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Algebra / Zahlentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 15.05.2023 bis 09:00 Uhr auf Moodle

Bitte beachten:
Jede Aufgabe in separatem PDF abgeben.
Erste Seite in jedem PDF mit Namen und Matrikelnummern versehen.
Partnerabgabe ist erlaubt und wird empfohlen.

Serie 3 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

(a) Finden Sie händisch die Primfaktorzerlegungen der Zahlen $3\,570$, $135\,135$, 273^{273} und $2^{32}-1$.

(b) Bestimmen Sie händisch die folgenden größten gemeinsamen Teiler $(777^{777}, 273^{273})$, $(2^{16}-1, 3^{12}-2^{12})$, $(10^6-1, 10^9+1)$ und $(3\,600, 3\,240, 1\,125)$ durch Angabe ihrer Primfaktorzerlegung.

(c) Bestimmen Sie händisch die folg. kleinsten gemeinsamen Vielfachen $[777^{777}, 273^{273}]$, $[2^{16}-1, 3^{12}-2^{12}]$, $[10^6-1, 10^9+1]$ und $[3\,600, 3\,240, 1\,125]$ durch Angabe ihrer Primfaktorzerlegung.

(d) Finden Sie drei natürliche Zahlen a_1, a_2, a_3, die teilerfremd, aber nicht paarweise teilerfremd sind.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

(a) Führen Sie für die folgenden Paare natürlicher Zahlen geschickt Division mit Rest durch: $22\,222$ und 101, $3^{16}-2^{16}$ und 4^4+9^4, sowie $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3$ und $2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2$.

(b) Verwenden Sie Division mit Rest, um die Zahlen 120 bzw. 998 im Siebenersystem darzustellen, sie also in der Form

$$g_\ell \cdot 7^\ell + \ldots + g_2 \cdot 7^2 + g_1 \cdot 7 + g_0 \quad (0 \leq g_j \leq 6,\, g_\ell \neq 0;\, j = 0, \ldots, \ell)$$

zu schreiben.

(c) Berechnen Sie das Produkt $120 \cdot 998$ im Siebenersystem unter Verwendung der Ergebnisse aus Aufgabenteil (b).

Aufgabe 3 (10 Punkte)
Es sei $n = g_\ell \cdot 10^\ell + \ldots + g_2 \cdot 10^2 + g_1 \cdot 10 + g_0$ $(0 \leq g_j \leq 9,\ g_\ell \neq 0;\ j = 0, \ldots, \ell)$ die Dezimaldarstellung einer natürlichen Zahl n. Dann heißt die Größe

$$Q(n) = g_0 + g_1 + g_2 + \ldots + g_\ell$$

Quersumme von n,

$$Q_a(n) = g_0 - g_1 + g_2 \mp \ldots + (-1)^\ell g_\ell$$

alternierende Quersumme von n und

$$Q_{3a}(n) = (g_0 + g_1 \cdot 10 + g_2 \cdot 10^2) - (g_3 + g_4 \cdot 10 + g_5 \cdot 10^2) \pm \ldots$$

alternierende 3*-Block-Quersumme von* n. Zeigen Sie:

(a) n ist genau dann durch 3 bzw. 9 teilbar, wenn $Q(n)$ durch 3 bzw. 9 teilbar ist.

(b) n ist genau dann durch 8 teilbar, wenn $g_2 \cdot 4 + g_1 \cdot 2 + g_0$ durch 8 teilbar ist.

(c) n ist genau dann durch 11 teilbar, wenn $Q_a(n)$ durch 11 teilbar ist.

(d) n ist genau dann durch 7 teilbar, wenn $Q_{3a}(n)$ durch 7 teilbar ist.