Übungsaufgaben zur Vorlesung
Algebra / Zahlentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 22.05.2023 bis 09:00 Uhr auf Moodle

Bitte beachten:
Jede Aufgabe in separatem PDF abgeben.
Erste Seite in jedem PDF mit Namen und Matrikelnummern versehen.
Partnerabgabe ist erlaubt und wird empfohlen.

Serie 4 (30 + 10 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Untersuchen Sie, ob folgende Mengen M mit der Verknüpfung $\circ$ eine Halbgruppe oder ein Monoid bilden. Ist die Verknüpfung kommutativ?

(a) $M = 2\mathbb{N} + 1$ mit $m \circ n := 3(m + n) \quad (m, n \in 2\mathbb{N} + 1)$.

(b) $M = 2\mathbb{N} + 1$ mit $m \circ n := 3 \cdot m \cdot n \quad (m, n \in 2\mathbb{N} + 1)$.

(c) $M = \mathbb{N}$ mit $m \circ n := \min\{m, n\} \quad (m, n \in \mathbb{N})$.

(d) $M = \mathbb{N}$ mit $m \circ n := m^n \quad (m, n \in \mathbb{N})$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es sei n eine von Null verschiedene natürliche Zahl. Wir betrachten die Teilmenge $\mathcal{R}_n := \{0, \ldots, n-1\}$ der ersten n natürlichen Zahlen. Auf der Menge $\mathcal{R}_n$ wurden in der Vorlesung die beiden folgenden Verknüpfungen eingeführt:

$$\oplus\colon \mathcal{R}_n \times \mathcal{R}_n \longrightarrow \mathcal{R}_n, \quad \text{gegeben durch } (a, b) \mapsto a \oplus b := R_n(a + b);$$
$$\odot\colon \mathcal{R}_n \times \mathcal{R}_n \longrightarrow \mathcal{R}_n, \quad \text{gegeben durch } (a, b) \mapsto a \odot b := R_n(a \cdot b).$$

Hierbei bezeichnet $R_n(c) \in \mathcal{R}_n$ den Rest der natürlichen Zahl c nach Division durch n.

Die Assoziativität der Verknüpfungen $\oplus$ und $\odot$ wird in den Übungen gezeigt. Diese kann also im Folgenden vorausgesetzt werden.

(a) Zeigen Sie, dass $(\mathcal{R}_n, \oplus)$ eine abelsche Gruppe ist. Geben Sie die Gruppentafel für $(\mathcal{R}_6, \oplus)$ an.

(b) Es sei $n \in \{1, \ldots, 6\}$. Entscheiden Sie, wann $(\mathcal{R}_n \setminus \{0\}, \odot)$ eine abelsche Gruppe ist und geben Sie gegebenenfalls die entsprechende Gruppentafel an.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Gegeben sei ein regelmäßiges n-Eck P_n ($n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$) in der euklidischen Ebene, das seinen Mittelpunkt M im Ursprung hat. Gemäß Vorlesung ist die *n-te Diedergruppe* D_{2n} definiert durch die Menge aller Kongruenzabbildungen, die P_n auf sich selbst überführen; die Verknüpfung ist dabei durch die Hintereinanderausführung der entsprechenden Abbildungen gegeben.

(a) Beweisen Sie, dass die Gruppe D_{2n} mindestens eine Spiegelung s und eine Drehung d um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ enthält; geben Sie dazu die Spiegelachse von s und das Drehzentrum von d an. Verifizieren Sie für die beiden Elemente s und d die Relationen

$$s^2 = \mathrm{id}, \qquad d^n = \mathrm{id}, \qquad s \circ d \circ s = d^{-1}.$$

(b) Zeigen Sie, dass die Elemente $s \circ d^j$ ($j = 0, \ldots, n-1$) paarweise verschiedene Spiegelungen sind, die P_n auf sich selbst abbilden.

(c) Zeigen Sie geometrisch anschaulich, ausgehend von der in der Vorlesung gegebenen Definition, dass D_{2n} aus den n Drehungen $d^0, \ldots, d^{n-1}$ und den n Spiegelungen $s \circ d^0, \ldots, s \circ d^{n-1}$ besteht.

Aufgabe 4* (10 Punkte)

Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe. Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln:

(a) $(g^{-1})^{-1} = g$ für alle $g \in G$.

(b) $(g \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ g^{-1}$ für alle $g, h \in G$.

(c) $g^n \circ g^m = g^{n+m}$ für alle $g \in G$ und alle $n, m \in \mathbb{N}$.

(d) $(g^n)^m = g^{n \cdot m}$ für alle $g \in G$ und alle $n, m \in \mathbb{N}$.