

## Übungsaufgaben zur Vorlesung

**Algebra / Zahlentheorie**

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 30.05.2023 bis 09:00 Uhr auf Moodle

**Bitte beachten:****Jede Aufgabe in separatem PDF abgeben.****Erste Seite in jedem PDF mit Namen und Matrikelnummern versehen.****Partnerabgabe ist erlaubt und wird empfohlen.****Serie 5 (30 Punkte)****Aufgabe 1 (10 Punkte)**

Bestimmen Sie alle strukturell verschiedenen Gruppentafeln zu Gruppen der Ordnungen 1, 2, 3 und 4.

**Aufgabe 2 (10 Punkte)**

- (a) Bestimmen Sie für jedes Element  $\pi \in S_3$  seine Ordnung  $\text{ord}_{S_3}(\pi)$ .
- (b) Bestimmen Sie alle Untergruppen der Gruppe  $S_3$ . Welche davon sind kommutativ? Welche davon sind zyklisch? Welche davon sind Normalteiler? Begründen Sie!
- (c) Gibt es einen Gruppenisomorphismus zwischen  $S_3$  und  $\mathcal{R}_6$ ? Begründen Sie!

**Aufgabe 3 (10 Punkte)**

Es sei  $f: (G, \circ_G) \rightarrow (H, \circ_H)$  ein Gruppenhomomorphismus.

- (a) Zeigen Sie, dass für ein Element  $g \in G$  und sein Inverses  $g^{-1} \in G$  die Gleichheit  $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$  in  $H$  besteht.
- (c) Zeigen Sie, dass für ein Element  $g \in G$  stets  $\text{ord}_G(g) \geq \text{ord}_H(f(g))$  gilt.
- (d) Zeigen Sie: Ist  $f$  ein Gruppenisomorphismus, so ist die mengentheoretische Umkehrabbildung  $f^{-1}: H \rightarrow G$  ebenfalls ein Gruppenisomorphismus.