HU Berlin Sommersemester 2023

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Algebra / Zahlentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 12.06.2023 bis 09:00 Uhr auf Moodle

Bitte beachten:
Jede Aufgabe in separatem PDF abgeben.
Erste Seite in jedem PDF mit Namen und Matrikelnummern versehen.
Partnerabgabe ist erlaubt und wird empfohlen.

Serie 7 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

(a) Es sei $(H, \circ)$ eine reguläre Halbgruppe und $h \in H$. Die Abbildung $f_h \colon H \longrightarrow H$ sei gegeben durch $f_h(g) \coloneqq g \circ h$ $(g \in H)$. Untersuchen Sie, ob f_h im Allgemeinen injektiv ist. Untersuchen Sie weiter, ob f_h im Allgemeinen surjektiv ist.

(b) Beweisen Sie, dass die Halbgruppe $(\mathbb{N}, \circ)$ mit der Verknüpfung $m \circ n \coloneqq \max(m, n)$ $(m, n \in \mathbb{N})$ nicht regulär ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Abbildung f_h aus Aufgabenteil (a) für die Halbgruppe $(\mathbb{N}, \circ)$ aus Aufgabenteil (b) im Allgemeinen nicht injektiv ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Wir definieren auf der Gruppe der ganzen Zahlen $(\mathbb{Z}, +)$, gegeben durch die in der Vorlesung eingeführten Äquivalenzklassen $[a, b]$ mit $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, eine Multiplikation durch

$$[a, b] \cdot [a', b'] \coloneqq [aa' + bb', ab' + a'b] \qquad (a, b, a', b' \in \mathbb{N}),$$

wobei rechter Hand auf die Multiplikation natürlicher Zahlen zurückgegriffen wird.

Zeigen Sie, dass die derart definierte Multiplikation unabhängig von der Wahl der Repräsentanten ist. Beweisen Sie weiter eines der beiden Distributivgesetze.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die kommutative Halbgruppe $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \cdot)$ regulär ist.

(b) Wenden Sie die Konstruktion einer Gruppe $(G, \circ)$ aus einer kommutativen regulären Halbgruppe auf die Halbgruppe $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \cdot)$ an. Welches ist die zugrunde liegende Äquivalenzrelation? Wie ist die zugrunde liegende Verknüpfung definiert? Mit welchem Zahlbereich können Sie die so konstruierte Gruppe $(G, \circ)$ identifizieren, d. h. zu welchem Zahlbereich ist $(G, \circ)$ isomorph?

(c) Sind die Halbgruppen $(\mathbb{N}, +)$ und $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \cdot)$ zueinander isomorph? Sind die aus $(\mathbb{N}, +)$ und $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \cdot)$ konstruierten Gruppen $(\mathbb{Z}, +)$ und $(G, \circ)$ zueinander isomorph? Begründen Sie.