Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II*

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 07.06.2022 bis 09:00 Uhr auf Moodle

Bitte beachten:
Jede Aufgabe in separatem PDF abgeben.
Erste Seite in jedem PDF mit Namen und Matrikelnummern versehen.
Partnerabgabe ist erlaubt und wird empfohlen.

Serie 7 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es seien $A = (\alpha_{k,j})_{k,j=1,\ldots,n}\,, B = (\beta_{k,j})_{k,j=1,\ldots,n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ zwei komplexe $(n \times n)$-Matrizen. Auf dem komplexen Vektorraum $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ wird dann durch $\|A\|_\infty := n \cdot \max\{|\alpha_{k,j}|\}_{k,j=1,\ldots,n}$ eine *Norm* definiert.

(a) Beweisen Sie die Ungleichung $\|A \cdot B\|_\infty \leq \|A\|_\infty \cdot \|B\|_\infty$.

(b) Benutzen Sie Aufgabenteil (a), um zu zeigen, dass die Reihe $\exp(A) := \sum_{\ell=0}^{\infty} A^\ell/\ell!$ für alle $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ einen Grenzwert in $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ besitzt.

(c) Beweisen Sie die Gültigkeit der Funktionalgleichung $\exp(A + B) = \exp(A) \cdot \exp(B)$, falls $A \cdot B = B \cdot A$ gilt.

(d) Zeigen Sie, dass die Gleichung $\exp(S^{-1} \cdot A \cdot S) = S^{-1} \cdot \exp(A) \cdot S$ für reguläre Matrizen $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ gilt.

(e) Beschreiben Sie unter Verwendung von (b), (c) und (d) sowie der Jordanschen Normalform ein Verfahren zur Bestimmung von $\exp(A)$ für eine beliebige Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es seien eine Matrix $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ und ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ gegeben. Die Gleichung

$$\begin{pmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \\ f_3'(t) \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{pmatrix},$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen $f_j \colon \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}$ $(j = 1, 2, 3)$, bildet zusammen mit der Anfangsbedingung

$$\begin{pmatrix} f_1(0) \\ f_2(0) \\ f_3(0) \end{pmatrix} = v$$

ein System gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen.

(a) Zeigen Sie, dass die Vektorfunktion $\exp(t \cdot A) \cdot v$ eine Lösung dieses Differentialgleichungssystems ist.

(b) Geben Sie explizit eine Lösung des Differentialgleichungssystems für

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

an.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

(a) Es sei $(V, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum mit der Norm $\|\cdot\|$. Beweisen Sie, dass für alle $x, y \in V$ die Formel

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}\big(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\big)$$

gilt.

(b) Beweisen Sie die Ungleichung

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin(t)\cos(t)}\,\mathrm{d}t \leq 1.$$

Hinweis: Beachten Sie dazu die Übungsaufgabe 3 (d) aus Serie 6.

(c) Die *adjungierte Matrix* A^* einer Matrix $A = (\alpha_{k,j})_{k,j=1,\ldots,n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ ist durch

$$A^* = \overline{A^t} = \begin{pmatrix} \overline{\alpha}_{1,1} & \cdots & \overline{\alpha}_{n,1} \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{\alpha}_{1,n} & \cdots & \overline{\alpha}_{n,n} \end{pmatrix}$$

definiert. Beweisen Sie für zwei Matrizen $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ die Ungleichung

$$\big|\mathrm{tr}(A \cdot B^*)\big| \leq \big(\mathrm{tr}(A \cdot A^*)\big)^{1/2} \cdot \big(\mathrm{tr}(B \cdot B^*)\big)^{1/2}.$$

Hinweis: Definieren Sie auf dem Vektorraum $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ ein geeignetes Skalarprodukt und verwenden Sie die Ungleichung von Cauchy–Schwarz.