

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Algebra / Zahlentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 19.06.2023 bis 09:00 Uhr auf Moodle

Bitte beachten:**Jede Aufgabe in separatem PDF abgeben.****Erste Seite in jedem PDF mit Namen und Matrikelnummern versehen.****Partnerabgabe ist erlaubt und wird empfohlen.****Serie 8 (30 + 10 Punkte)****Aufgabe 1 (10 Punkte)**

Zeigen Sie, dass die Ordnungsrelation „ $<$ “ auf der Menge der ganzen Zahlen \mathbb{Z} die beiden folgenden Regeln erfüllt:

- (a) Für alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$ gilt mit $a < b$ auch $a + c < b + c$.
- (b) Für alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$ gilt mit $a < b$ die Ungleichung

$$a \cdot c < b \cdot c, \text{ falls } c > 0 \quad \text{bzw.} \quad a \cdot c > b \cdot c, \text{ falls } c < 0.$$

Hinweis: Man beweise zuerst, dass für zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ die Relation $a < b$ äquivalent zur Relation $b - a > 0$ ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Beweisen Sie die Gültigkeit der Division mit Rest im Bereich der ganzen Zahlen, d. h. gegeben $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $b \neq 0$, dann existieren eindeutig bestimmte ganze Zahlen q, r mit $0 \leq r < |b|$, so dass die Gleichheit

$$a = q \cdot b + r$$

besteht.

Hinweis: Es darf die Gültigkeit der Division mit Rest im Bereich der natürlichen Zahlen vorausgesetzt werden.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Integritätsbereich mit Einselement 1. Wir definieren den *Polynomring* $(R[X], +, \cdot)$ in der Variablen X mit Koeffizienten aus R als die Menge

$$R[X] := \left\{ \sum_{j \in \mathbb{N}} a_j \cdot X^j \mid a_j \in R, a_j = 0 \text{ für alle bis auf endliche viele } j \in \mathbb{N} \right\}$$

mit den Verknüpfungen

$$\left(\sum_{j \in \mathbb{N}} a_j \cdot X^j \right) + \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} b_j \cdot X^j \right) := \sum_{j \in \mathbb{N}} (a_j + b_j) \cdot X^j,$$

$$\left(\sum_{j \in \mathbb{N}} a_j \cdot X^j \right) \cdot \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} b_j \cdot X^j \right) := \sum_{j \in \mathbb{N}} \left(\sum_{\substack{k, \ell \in \mathbb{N} \\ k + \ell = j}} a_k \cdot b_\ell \right) \cdot X^j.$$

- (a) Zeigen Sie, dass $(R[X], +, \cdot)$ ein Integritätsbereich mit Einselement ist.
- (b) Weisen Sie nach, dass die multiplikativ invertierbaren Elemente von $R[X]$ mit den multiplikativ invertierbaren Elementen von R übereinstimmen.

Aufgabe 4* (10 Punkte)

Es seien $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 0$ und $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ die Menge der Linksnebenklassen von \mathbb{Z} nach $n\mathbb{Z}$. Mit der Schreibweise $\bar{a} := a + n\mathbb{Z}$ ($a \in \mathbb{Z}$) wird durch

$$\bar{a} \cdot \bar{b} := \overline{a \cdot b} \quad (a, b \in \mathbb{Z})$$

eine Multiplikation auf $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ definiert, die assoziativ und kommutativ ist.

- (a) Beweisen Sie, dass $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \setminus \{\bar{0}\}, \cdot)$ genau dann eine Gruppe ist, wenn n eine Primzahl ist.
- (b) Es sei p eine Primzahl und $a \in \mathbb{Z}$. Beweisen Sie mit Hilfe des Satzes von Lagrange, dass die Teilbarkeitsbeziehung

$$p \mid (a^p - a)$$

besteht.

Hinweis: Betrachten Sie für $p \nmid a$ die Ordnung von \bar{a} in der Gruppe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{\bar{0}\}, \cdot)$.