Übungsaufgaben zur Vorlesung
Algebra / Zahlentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 26.06.2023 bis 09:00 Uhr auf Moodle

Bitte beachten:
Jede Aufgabe in separatem PDF abgeben.
Erste Seite in jedem PDF mit Namen und Matrikelnummern versehen.
Partnerabgabe ist erlaubt und wird empfohlen.

Serie 9 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

(a) Es seien $(R, +, \cdot\,)$ ein Ring mit Einselement 1 und

$$R^\times := \big\{a \in R \,\big|\, \exists\, b \in R \colon a \cdot b = 1 = b \cdot a\big\} \subseteq R$$

die Menge aller Elemente in R, die in R multiplikativ invertierbar sind. Zeigen Sie: $(R^\times, \cdot\,)$ ist eine Gruppe. Man nennt diese die *Einheitengruppe von R*.

(b) Bestimmen Sie die Einheitengruppen der Ringe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ für $n = 7, 9, 13, 21$. Welche dieser Gruppen sind zyklisch? Welche sind zueinander isomorph?

Aufgabe 2 (10 Punkte)

(a) Es seien m, n von Null verschiedene natürliche Zahlen mit $(m, n) = 1$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f \colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},$$

definiert durch die Zuordnung $\mathbb{Z} \ni a \mapsto (a + m\mathbb{Z}, a + n\mathbb{Z})$, ein Ringhomomorphismus mit $\ker(f) = mn\,\mathbb{Z}$ ist.

(b) Beweisen Sie unter Verwendung von Aufgabenteil (a), dass f den Ringisomorphismus

$$\mathbb{Z}/mn\,\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

induziert.
Hinweis: Verwenden Sie den Homomorphiesatz für Ringe.

(c) Es seien $m = 7$ und $n = 11$. Bestimmen Sie ein $a \in \mathbb{Z}$, so dass

$$f(a) = (3 + 7\mathbb{Z}, 2 + 11\mathbb{Z})$$

gilt. Beweisen Sie, dass die Differenz zweier Lösungen $a, a' \in \mathbb{Z}$ obiger Gleichung ein ganzzahliges Vielfaches von mn ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

(a) Berechnen Sie den größten gemeinsamen Teiler (a, b) für die drei Paare ganzer Zahlen

- $a = 105, b = 40$
- $a = 2011, b = -229$
- $a = -2023, b = -238$

unter Verwendung des Euklidischen Algorithmus.

(b) Stellen Sie mit Hilfe des Erweiterten Euklidischen Algorithmus die in Aufgabenteil (a) berechneten größten gemeinsamen Teiler als ganzzahlige Linearkombinationen von a und b dar, d. h. bestimmen Sie $x, y \in \mathbb{Z}$ mit der Eigenschaft

$$(a, b) = x \cdot a + y \cdot b.$$