HU Berlin Sommersemester 2024

# Übungsaufgaben zur Vorlesung

# **Algebra / Zahlentheorie**

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 21.05.2024 bis 09:00 Uhr auf Moodle

**Bitte beachten:**
**Jede Aufgabe in separatem PDF abgeben.**
**Erste Seite in jedem PDF mit Namen und Matrikelnummern versehen.**
**Partnerabgabe ist erlaubt und wird empfohlen.**

## Serie 5 (30 + 10 Punkte)

### Aufgabe 1 (10 Punkte)

Bestimmen Sie alle strukturell verschiedenen Gruppentafeln zu Gruppen der Ordnungen 1, 2, 3 und 4.

### Aufgabe 2 (10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie für jedes Element $\pi \in S_3$ seine Ordnung $\operatorname{ord}_{S_3}(\pi)$.

(b) Bestimmen Sie alle Untergruppen der Gruppe $S_3$. Welche davon sind kommutativ? Welche davon sind zyklisch? Begründen Sie!

(c) Gibt es einen Gruppenisomorphismus zwischen $S_3$ und $\mathcal{R}_6$? Begründen Sie!

### Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es sei $f\colon (G, \circ_G) \longrightarrow (H, \circ_H)$ ein Gruppenhomomorphismus.

(a) Zeigen Sie, dass für ein Element $g \in G$ und sein Inverses $g^{-1} \in G$ die Gleichheit $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$ in $H$ besteht.

(b) Zeigen Sie, dass für ein Element $g \in G$ stets $\operatorname{ord}_G(g) \geq \operatorname{ord}_H(f(g))$ gilt.

(c) Zeigen Sie: Ist $f$ ein Gruppenisomorphismus, so ist die mengentheoretische Umkehrabbildung $f^{-1}\colon H \longrightarrow G$ ebenfalls ein Gruppenisomorphismus.

### Aufgabe 4* (10 Punkte)

Gegeben sei ein regelmäßiges $n$-Eck $P_n$ ($n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$) in der euklidischen Ebene, das seinen Mittelpunkt $M$ im Ursprung hat. Gemäß Vorlesung ist die *$n$-te Diedergruppe* $D_{2n}$ definiert durch die Menge aller Kongruenzabbildungen, die $P_n$ auf sich selbst überführen; die Verknüpfung ist dabei durch die Hintereinanderausführung der entsprechenden Abbildungen gegeben.

(a) Beweisen Sie, dass die Gruppe $D_{2n}$ mindestens eine Spiegelung $s$ und eine Drehung $d$ um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ enthält; geben Sie dazu die Spiegelachse von $s$ und das Drehzentrum von $d$ an. Verifizieren Sie für die beiden Elemente $s$ und $d$ die Relationen

$$s^2 = \mathrm{id}, \qquad d^n = \mathrm{id}, \qquad s \circ d \circ s = d^{-1}.$$

(b) Zeigen Sie, dass die Elemente $s \circ d^j$ $(j = 0, \ldots, n-1)$ paarweise verschiedene Spiegelungen sind, die $P_n$ auf sich selbst abbilden.

(c) Zeigen Sie geometrisch anschaulich, ausgehend von der in der Vorlesung gegebenen Definition, dass $D_{2n}$ aus den $n$ Drehungen $d^0, \ldots, d^{n-1}$ und den $n$ Spiegelungen $s \circ d^0, \ldots, s \circ d^{n-1}$ besteht.