MSG (Zirkel 12) – Hausaufgaben

1. Die Zahlenfolge (a_1, a_2, a_3, ...) sei rekursiv definiert durch:

   $$a_1 := 1,\ a_2 := 1,\ a_3 := 2 \text{ und } a_{n+3} := \frac{1}{a_n}\left(a_{n+1}a_{n+2} + 7\right) \text{ für } n > 0.$$

   Man beweise, dass alle Folgenglieder ganzzahlig sind.

2. Sei $ABCD$ ein konvexes Sehnenviereck. Seien E und F variable Punkte auf den Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$, sodass $\frac{|\overline{AE}|}{|\overline{EB}|} = \frac{|\overline{CF}|}{|\overline{FD}|}$ gilt. Sei P ein Punkt auf der Strecke $\overline{EF}$, sodass $\frac{|\overline{PE}|}{|\overline{PF}|} = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{CD}|}$ gilt. Zeigen Sie, dass das Verhältnis der Flächeninhalte der Dreiecke ΔAPD und ΔBPC nicht von der Wahl von E und F abhängt.

3. For each integer $n > 1$, let $p(n)$ denote the largest prime factor of n.
   Determine all triples x, y, z of distinct positive integers satisfying
   (i) x, y, z are in arithmetic progression, and
   (ii) $p(xyz) \leq 3$.